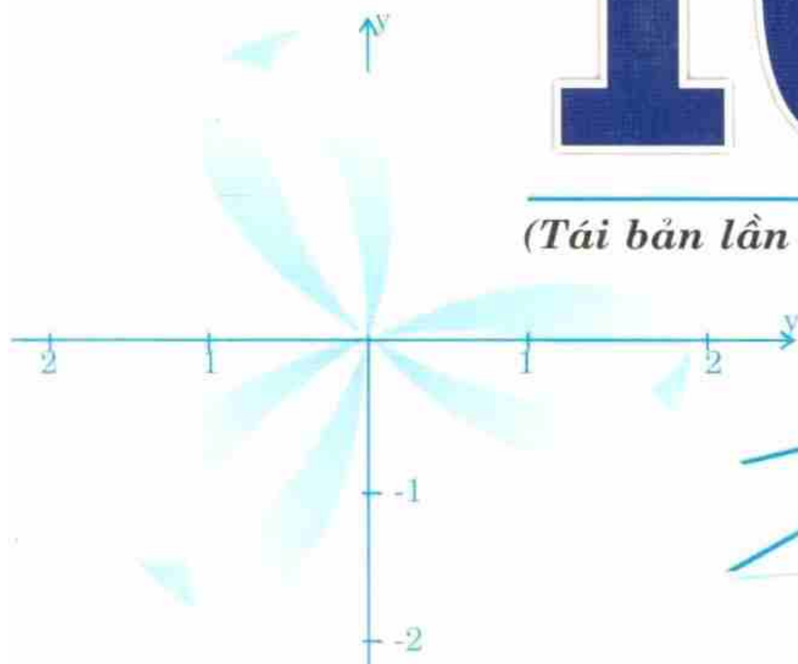
NGƯT. PHẠM QUỐC PHONG

Bồi dưỡng Đại số 10

(Tái bản lần thứ hai)



* Dùng cho học sinh ban Khoa học Tự nhiên
* Ôn luyện thi Tú tài, Đại học & Cao đẳng



NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

NGƯT. PHẠM QUỐC PHONG

Bồi dưỡng ĐẠI SỐ 10

- Dùng cho học sinh ban Khoa học Tự nhiên
- Ôn luyện thi Tú tài, ĐH & CĐ

(Tái bản lần thứ hai)

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
16 Hàng Chuối – Hai Bà Trưng – Hà Nội
Điện thoại: (04) 39724852; (04) 39724770. Fax: (04) 39714899

* * *

Chịu trách nhiệm xuất bản:

Giám đốc: **PHÙNG QUỐC BẢO**

Tổng biên tập: **PHẠM THỊ TRÂM**

Biên tập: **NGUYỄN QUANG HUY**

NGUYỄN TRỌNG QUYỀN

Trình bày bìa: **THÁI HỌC**

Thực hiện liên kết: **Nhà sách HỒNG ÂN**

SÁCH LIÊN KẾT

BỒI DƯỠNG ĐẠI SỐ 10

Mã số: 1L- 24ĐH2010
In 1.000 cuốn, khổ 16 × 24cm tại Xí nghiệp In Đường Sắt.
Giấy phép xuất bản số: 119-2010/CXB/09-10/ĐHQGHN, ngày 26/01/2010.
Quyết định xuất bản số: 24LK-TN/XB.
In xong và nộp lưu chiểu quý II năm 2010.

Lời nói đầu

Trăn trở mấy chục năm qua cho mỗi tiết dạy, viết quyển tài liệu này, tôi muốn chia sẻ cùng các em học sinh thân yêu, chia sẻ cùng các thầy cô giáo các kinh nghiệm tích góp được trong quá trình giảng dạy, bồi dưỡng học sinh giỏi và luyện thi vào Đại học.

Mỗi vấn đề trong sách trình bày nhất quán theo trình tự : cơ sở lý luận, thí dụ minh hoạ, lời bình, bài tập.

• Về cơ sở lý luận : Nếu không có gì mới, sách chỉ nhắc lại những kiến thức cơ bản nhất (nếu thấy đó là cần thiết).

• Các thí dụ trình bày trong cuốn sách được chọn lọc kỹ lưỡng, có tính điển hình và khai thác tối đa các góc cạnh của mỗi phần kiến thức. Nhiều thí dụ mới mẻ, đó là *tuổi trẻ* của cuốn tài liệu.

Nêu bật các *dạng* là kết quả của sự khái quát hoá *xâu chuỗi* nhiều bài toán; đưa ra các *thuật toán* giải chúng đó là điều *có được* của quyển sách này.

• Với cách diễn đạt đơn giản, trình bày bằng *nhiều cách*, đính kèm những *lời bình*, dễ làm người đọc hiểu sâu sắc hơn *bản chất* bài toán và *ý nghĩa* lời giải.

• Quyển sách còn thâu tóm các bài viết của tác giả đã đăng trên tạp chí "Toán học & Tuổi trẻ", tạp chí "Khoa học" của trường Đại học Vinh.

• Sau mỗi phần, sách có hệ thống bài tập tương thích để các bạn rèn luyện. Nên nhớ rằng, kiến thức chỉ trở thành *hồng cầu* trong cơ thể bạn, nếu bạn thấy mình vượt qua được các bài tập ấy.

Mặc dù đã rất cố gắng, cuốn sách vẫn có thể còn những hạn chế và thiếu sót bởi kinh nghiệm và sự hiểu biết. Rất mong nhận được sự đóng góp ý kiến của bạn đọc. Mọi góp ý xin liên hệ với tác giả theo địa chỉ sau đây:

Bà Hoàng Thị Tế
Số nhà : 239, đường Nguyễn Ái Quốc, thị xã Hồng Lĩnh, tỉnh Hà Tĩnh.
Điện thoại : 039.835713

Hy vọng cuốn sách là tài liệu bổ ích góp phần nâng cao kiến thức cho mọi người sử dụng nó.

TÁC GIẢ
Phạm Quốc Phong

Chương I. HÀM SỐ

§1. KHÁI NIỆM VÀ BÀI TOÁN CƠ BẢN

Định nghĩa hàm số

Cho $\mathcal{D}$ là một tập con khác rỗng của tập các số thực R.

• *Một hàm số F xác định trên $\mathcal{D}$ là một quy tắc cho ứng mỗi phần tử $x \in \mathcal{D}$ với một và chỉ một số thực $y \in R$.*

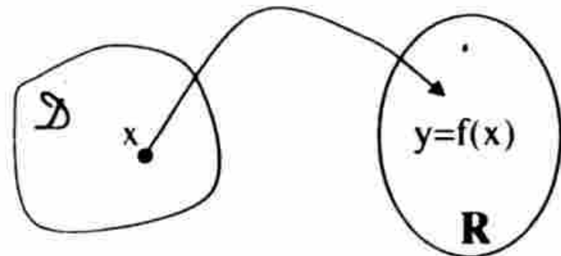
• $\mathcal{D}$ gọi là *tập xác định* (hay *miền xác định*) của hàm số f.

Phần tử $x \in \mathcal{D}$ gọi là *biến số độc lập* (hay *biến số*, hay *đối số*). Số thực y tương ứng với biến số x gọi là *giá trị của hàm số f tại x*, kí hiệu là f(x).

Cách viết biểu thị hàm số trên :

$f : \mathcal{D} \to R$

$x \mapsto y=f(x)$



Hình 1

Tuy nhiên thường gọi tắt là hàm số y=f(x) hoặc hàm số f(x)

Như vậy : Một hàm số được xác định nếu ta biết được tập xác định $\mathcal{D}$ và quy tắc y=f(x) của hàm số.

Theo định nghĩa đó :

+) Trên $\mathcal{D}$, không thể tồn tại x mà : Không tương ứng với bất cứ $y \in R$ hoặc tương ứng với nhiều hơn một $y \in R$.

+) Trên tập R : Tập hợp $Y = \{y \in R | y = f(x), x \in \mathcal{D}\}$ là một tập con của R. (Không yêu cầu lấp đầy R). Hiển nhiên $Y \neq \varnothing$. (h.1)

Bài toán 1. Tìm tập xác định của hàm số.

• Ta thường gặp các hàm số có dạng y=f(x) trong đó f(x) là một biểu thức chứa biến x. Ta nói hàm số đó được cho bằng biểu thức.

• Khi hàm số cho bằng biểu thức ta có qui ước : Nếu không nói gì thêm thì tập xác định của hàm số y = f(x) là tập hợp các giá trị của x để cho biểu thức f(x) có nghĩa.

• Lưu ý : $y=\sqrt{f(x)}$ có tập xác định $\mathcal{D}=\{x \in R | f(x) \geq 0\}$

$y = \dfrac{1}{f(x)}$ có tập xác định $\mathcal{D} = \{x \in R | f(x) \neq 0\}$

> **Thí dụ 1**
>
> Tìm tập xác định của mỗi hàm số sau :
>
> 1) $y = \dfrac{x+2}{2x-10}$, 2) $y = \sqrt{3-x}$, 3) $y = \dfrac{7x+13}{4x^2-4x+3}$, 4) $y = \dfrac{5x+13}{\sqrt{4-x^2}}$

Lời giải

1) Hàm số xác định khi và chỉ khi $2x - 10 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 5$.

Vậy hàm số có tập xác định là $\mathcal{D}=R\setminus\{5\}$

2) Hàm số xác định khi và chỉ khi $3 - x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 3$.

Vậy hàm số có tập xác định là $\mathcal{D} = (-\infty; 3]$

3) Hàm số xác định khi và chỉ khi $4x^2 - 4x + 3 \neq 0 \Leftrightarrow (2x - 1)^2 + 2 \neq 0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$

Vậy hàm số có tập xác định là R.

4) Hàm số xác định khi và chỉ khi $4 - x^2 > 0 \Leftrightarrow x^2 < 4$

$$\Leftrightarrow |x| < 2 \Leftrightarrow -2 < x < 2$$

Vậy hàm số có tập xác định là $\mathcal{D} = (-2; 2)$.

Thí dụ 2

Tìm tập xác định của mỗi hàm số sau :

1) $y = \sqrt[3]{5x^2 - 2x + 3}$, 2) $y = \dfrac{x + \sqrt{x}}{x^2 - 1}$,

3) $y = \dfrac{3x + 1}{x^2 - |x| + 1}$, 4) $y = \dfrac{\sqrt{x^2 - 16}}{|5 - x| + x - 5}$

Lời giải

1) Hàm số xác định khi và chỉ khi $5x^2 - 2x + 3 \geq 0 \Leftrightarrow 4x^2 + (x - 1)^2 + 2 \geq 0$

$\Leftrightarrow x \in \mathbb{R} \Rightarrow$ Vậy hàm số có tập xác định là R.

2) Hàm số xác định khi và chỉ khi $\begin{cases} x \geq 0 \\ x^2 - 1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x \neq \pm 1 \end{cases}$

Vậy hàm số có tập xác định là $\mathcal{D} = \{x \in \mathbb{R} | x \geq 0, x \neq 1\}$ (do $x \geq 0$)

3) Hàm số xác định khi và chỉ khi $x^2 - |x| + 1 \neq 0 \Leftrightarrow \left(|x| - \dfrac{1}{2}\right)^2 + \dfrac{3}{4} \neq 0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$.

Vậy hàm số có tập xác định là R.

4) Hàm số xác định khi và chỉ khi $\begin{cases} x^2 - 16 \geq 0 \\ |x - 5| + x - 5 \neq 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x \leq -4 \\ x \geq 4 \end{array}\right. \\ |5 - x| \neq 5 - x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x \leq -4 \\ x \geq 4 \end{array}\right. \\ 5 - x < 0 \end{cases} \Leftrightarrow x > 5.$$

Vậy hàm số có tập xác định là $\mathcal{D} = (5; +\infty)$.

Chú ý : Bạn có thể quên
- $|a| + a \neq 0 \Leftrightarrow |a| + a > 0 \Leftrightarrow a > 0$
- $|a| + a = 0 \Leftrightarrow a \leq 0$
- Không tồn tại a thoả mãn $|a| + a < 0$

Thí dụ 3

Tìm tập xác định của mỗi hàm số sau :

1) $y=\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}$.

2) $y=\sqrt{|x-2|+3x-x^2-1}$

3) $y=\dfrac{1}{\sqrt{12x-4x^2-9}}$.

4) $y=\sqrt{2x-3x^2-1}$

Lời giải

1) Viết lại : $y=\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}=\sqrt{(x-1)-2\sqrt{x-1}+1}=\sqrt{(\sqrt{x-1}-1)^2}=|\sqrt{x-1}-1|$

Hàm số xác định khi và chỉ khi $x-1\geq 0 \Leftrightarrow x\geq 1$.

Vậy hàm số có tập xác định là $\mathcal{D}=[1;+\infty)$

2) Hàm số xác định khi và chỉ khi $|x-2|+3x-x^2-1\geq 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\geq 2\\ -x^2+4x-3\geq 0\end{cases}\\ \begin{cases}x<2\\ -x^2+2x+1\geq 0\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\geq 2\\ 1-(x-2)^2\geq 0\end{cases}\\ \begin{cases}x<2\\ 2-(x-1)^2\geq 0\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\geq 2\\ x-2\leq 1\end{cases}\\ \begin{cases}x<2\\ |x-1|\leq \sqrt{2}\end{cases}\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}2\leq x\leq 3\\ 1-\sqrt{2}\leq x<2\end{array}\right. \Leftrightarrow 1-\sqrt{2}\leq x\leq 3.$$

Vậy hàm số có tập xác định là $\mathcal{D}=[1-\sqrt{2};3)$

3) Hàm số xác định khi và chỉ khi $12x-4x^2-9>0 \Leftrightarrow -(2x-3)^2>0$

$\Leftrightarrow x\in\varnothing$ Vậy hàm số $y=\dfrac{1}{\sqrt{12x-4x^2-9}}$ không tồn tại.

4) Hàm số xác định khi và chỉ khi $2x-3x^2-1\geq 0 \Leftrightarrow -2x^2-(x-1)^2>0$

$\Leftrightarrow x\in\varnothing$. Vậy hàm số $y=\sqrt{2x-3x^2-1}$ không tồn tại.

Thí dụ 4

Tìm tập xác định của hàm số : $y=\sqrt{2x^2+4x+5+\dfrac{3x+2}{x^2-x+2}}$

Lời giải

Hàm số xác định khi và chỉ khi $\Leftrightarrow 2x^2+4x+5+\dfrac{3x+2}{x^2-x+2}\geq 0$

$$\Leftrightarrow 2(x+1)^2+\left(3+\frac{3x+2}{x^2-x+2}\right)\geq 0 \Leftrightarrow 2(x+1)^2+\frac{3(x^2-x+2)+3x+2}{x^2-x+2}\geq 0$$

$$\Leftrightarrow 2(x+1)^2+\frac{3x^2+6}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{5}{4}}\geq 0 \Leftrightarrow x\in R.$$

Vậy hàm số đã cho có tập xác định là R.

Thí dụ 5

Tìm m để mỗi hàm số sau xác định trên $\mathcal{D} = (1; 3]$:

a) $y = \dfrac{1}{x - 2m}$, b) $y = \sqrt{3 + 2|m|x - m^2x^2}$

Lời giải

a) Ta có $x - 2m = 0 \Leftrightarrow x = 2m$. Bởi vậy : $\mathcal{D}$ là tập xác định của hàm số

$\Leftrightarrow 2m \notin (1; 3] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2m \le 1 \\ 2m > 3 \end{array}\right. \Leftrightarrow m \le \dfrac{1}{2}$ hoặc $m > \dfrac{3}{2}$.

b) Ta có $3 + 2|m|x - m^2x^2 \ge 0 \Leftrightarrow 4 - (|m|x - 1)^2 \ge 0 \Leftrightarrow (|m|x - 1)^2 \le 2$

$\Leftrightarrow -2 \le ||m|x - 1| \le 2 \Leftrightarrow -1 \le |m|x \le 3$ (1)

Trường hợp 1: $m = 0$ ta có (1) $\Leftrightarrow -1 \le 0.x \le 3 \Leftrightarrow x \in R$

$\Rightarrow m = 0$ là một giá trị phải tìm. (2)

Trường hợp 2 : $m \ne 0$ ta có (1) $\Leftrightarrow -\dfrac{1}{|m|} \le x \le \dfrac{3}{|m|}$.

Do $-\dfrac{1}{|m|} < 1, \forall m \ne 0$ nên hàm số xác định trên $\mathcal{D} \Leftrightarrow \dfrac{3}{|m|} \ge 3 \Leftrightarrow 0 \ne |m| \le 1$. (3)

Từ (2), (3) suy ra giá trị phải tìm của m là $|m| \le 1$

Thí dụ 6

Tìm m để hàm số $y = \sqrt{x^2 - (m+2)x + 1 - \dfrac{m^2}{4}}$ có tập xác định là R

Lời giải

Ta có $x^2 - (m+2)x + 1 - \dfrac{m^2}{4} = \left(x - \dfrac{m+2}{2}\right)^2 - \dfrac{m(m+2)}{2}$

Hàm số xác định trên R khi và chỉ khi $x^2 - (m+2)x + 1 - \dfrac{m^2}{4} \ge 0, \forall x \in R$.

$\Leftrightarrow \dfrac{m(m+2)}{2} \le 0 \Leftrightarrow m(m+2) \le 0 \Leftrightarrow (m+1)^2 \le 1 \Leftrightarrow |m+1| \le 1$

$\Leftrightarrow -1 \le m + 1 \le 1 \Leftrightarrow -2 \le m \le 0$. Vậy giá trị phải tìm của m là $-2 \le m \le 0$.

Bài toán 2. Khảo sát sự biến thiên của hàm số

1. Định nghĩa

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(a; b) \subset R$

• *Hàm số f(x) gọi là* ***đồng biến (hay tăng)*** *trên khoảng (a; b) nếu với mọi* x_1 *và* x_2 *thuộc (a; b)* : $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$.

• *Hàm số f(x) gọi là* ***nghịch biến (hay giảm)*** *trên khoảng (a; b) nếu với mọi* x_1 *và* x_2 *thuộc (a; b)* : $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$.

Chú ý 1 : Có những hàm số không đồng biến, cũng không nghịch biến trên khoảng (a; b). Ta gọi nó là hàm số *không đổi* trên khoảng ấy.

Chú ý 2 : Rõ ràng "$x_1<x_2 \Rightarrow f(x_1)<f(x_2)$" $\Leftrightarrow$ $\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}>0$.

"$x_1<x_2 \Rightarrow f(x_1)>f(x_2)$" $\Leftrightarrow$ $\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}<0$.

Bởi vậy :

* f(x) đồng biến trên (a; b) $\Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in (a;b) : x_1 \neq x_2$, $\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}>0$

* f(x) nghịch biến trên (a; b) $\Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in (a;b) : x_1 \neq x_2$, $\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}<0$

2. Dáng điệu của đồ thị của hàm số đồng biến, nghịch biến

*) *Nếu hàm số đồng biến trên trên khoảng (a; b) đồ thị của nó là một đường liền nét đi lên* (kể từ trái sang phải).

*) *Nếu hàm số nghịch biến trên trên khoảng (a; b) đồ thị của nó là một đường liền nét đi xuống* (kể từ trái sang phải).

*) Đồ thị *hàm không đổi* là đường thẳng song song với trục hoành.

3. Khảo sát sự biến thiên của hàm số

Khảo sát sự biến thiên của hàm số là chỉ ra hàm số đồng biến trên khoảng nào, nghịch biến trên khoảng nào, không đổi trên khoảng nào, trong khoảng xác định.

Đối với hàm số cho bằng biểu thức, việc khảo sát sự biến thiên có thể trình bày theo hai cách sau :

Cách 1 : Dựa vào định nghĩa.

Cách 2 : Dựa vào chú ý 2 ở trên

Thường kết quả khảo sát được ghi lại bằng cách lập bảng gọi là *bảng biến thiên của hàm số*.

Thí dụ 7

Khảo sát sự biến thiên của hàm số $y=f(x)=2x+\sqrt{x}$

Lời giải

Tập xác định : $\mathcal{D}=[0;+\infty)$.

Với mọi $x_1, x_2 \in \mathcal{D}: x_1 \neq x_2$ ta có :

$$f(x_2)-f(x_1)=2(x_2-x_1)+\sqrt{x_2}-\sqrt{x_1}=2(x_2-x_1)+\frac{x_2-x_1}{\sqrt{x_2}+\sqrt{x_1}}$$

$$\Rightarrow \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=2+\frac{1}{\sqrt{x_2}+\sqrt{x_1}}>0$$

$\Rightarrow f(x)=2x+\sqrt{x}$ là hàm số đồng biến trên $\mathcal{D}$.

Thí dụ 8

Khảo sát sự biến thiên của hàm số : $y = f(x) = 7 - 5x + 3x^2 - x^3$

Lời giải

Tập xác định R.

Với mọi $x_1, x_2 \in R$: $x_1 \neq x_2$ ta có :

$$f(x_2) - f(x_1) = -5(x_2 - x_1) + 3(x_2^2 - x_1^2) - (x_2^3 - x_1^3)$$

$$=(x_2 - x_1)[-5 + 3(x_2 + x_1) - (x_2^2 + x_2x_1 + x_1^2)]$$

$$= -\frac{1}{2}(x_2 - x_1)[1 + x_2^2 + x_1^2 + (x_2 + x_1 - 3)^2]$$

$$\Leftrightarrow \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = -\frac{1}{2}[1 + x_2^2 + x_1^2 + (x_2 + x_1 - 3)^2] < 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} < 0 \text{ với mọi } x_1, x_2 \in R : x_1 \neq x_2$$

$\Rightarrow$ Hàm số nghịch biến trên R.

Thí dụ 9

Khảo sát sự biến thiên của hàm số $y = f(x) = \frac{x+1}{x-1}$ (1)

Lời giải

Viết lại (1) $\Leftrightarrow f(x) = \frac{x - 1 + 2}{x - 1} \Leftrightarrow f(x) = 1 + \frac{1}{x - 1}$ (2)

Tập xác định $\mathcal{D} = (-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$

Với mọi $x_1, x_2 \in \mathcal{D}$: $x_1 \neq x_2$ ta có $f(x_2) - f(x_1) = \frac{1}{x_2 - 1} - \frac{1}{x_1 - 1}$

$$\Leftrightarrow f(x_2) - f(x_1) = \frac{x_1 - x_2}{(x_2 - 1)(x_1 - 1)} \Rightarrow \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{-1}{(x_2 - 1)(x_1 - 1)}$$

• Với mọi $x_1, x_2 \in (-\infty; 1) \Rightarrow \begin{cases} x_2 - 1 < 0 \\ x_2 - 1 < 0 \end{cases} \Rightarrow (x_2 - 1)(x_1 - 1) > 0$

$$\Rightarrow \frac{-1}{(x_2 - 1)(x_1 - 1)} < 0 \Rightarrow \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} < 0$$

$\Rightarrow$ f(x) nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 1)$

• Với mọi $x_1, x_2 \in (1; +\infty) \Rightarrow \begin{cases} x_2 - 1 > 0 \\ x_2 - 1 > 0 \end{cases} \Rightarrow (x_2 - 1)(x_1 - 1) > 0$

$$\Rightarrow \frac{-1}{(x_2 - 1)(x_1 - 1)} < 0 \Rightarrow \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} < 0$$

$\Rightarrow$ f(x) nghịch biến trên khoảng $(1; +\infty)$

Vậy hàm số luôn nghịch biến trên *từng* khoảng xác định của nó.

Bài toán 3. Tính chẵn–lẻ của hàm số

1) Định nghĩa

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathcal{D}$

• $f(x)$ gọi là hàm số **chẵn** nếu với mọi $x \in \mathcal{D}$ ta có $\begin{cases} -x \in \mathcal{D} \\ f(-x) = f(x) \end{cases}$

• $f(x)$ gọi là hàm số **lẻ** nếu với mọi $x \in \mathcal{D}$ ta có $\begin{cases} -x \in \mathcal{D} \\ f(-x) = -f(x) \end{cases}$

Chú ý 1 Có những hàm số không chẵn, cũng không lẻ.

2) Dáng điệu của đồ thị của hàm số chẵn, hàm số lẻ.

ĐỊNH LÝ :

* *Hàm số chẵn thì có đồ thị nhận trục tung làm trục đối xứng.*
* *Hàm số lẻ thì có đồ thị nhận gốc toạ độ làm tâm đối xứng.*

Thí dụ 10

Xét tính chẵn–lẻ của mỗi hàm số sau :

a) $y = f(x) = x^4 + 1$, b) $y = f(x) = \sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}$ c) $y = \sqrt{1+x}$

Lời giải

a) Tập xác định R.

Rõ ràng với mọi $x \in R$ ta có $-x \in R$ và $f(-x) = (-x)^4 + 1 = x^4 + 1 = f(x)$

$\Rightarrow y = f(x)$ là hàm số chẵn.

b) Tập xác định $\mathcal{D} = [-1; 1]$.

Rõ ràng với mọi $x \in \mathcal{D}$ ta có $-x \in \mathcal{D}$ và $f(-x) = \sqrt{1-x} - \sqrt{1+x} = -f(x)$

$\Rightarrow y = f(x)$ là hàm số lẻ.

c) Tập xác định $\mathcal{D} = [-1; +\infty)$.

Ta có $x_1 = 2 \in \mathcal{D}$ nhưng $-x_1 = -2 \notin \mathcal{D} \Rightarrow y = f(x)$ hàm số không chẵn, cũng không lẻ.

Thí dụ 11

Xét tính chẵn–lẻ và sự biến thiên của mỗi hàm số sau :

a) $y = f(x) = x^3 + x$, b) $y = f(x) = x^2 + 1$

Lời giải

a) Tập xác định R

Rõ ràng với mọi $x \in \mathcal{D}$ ta có $-x \in \mathcal{D}$ và $f(-x) = (-x)^3 - 3(-x) = -f(x)$

$\Rightarrow y = f(x)$ là hàm số lẻ.

Với mọi $x_1, x_2 \in R$: $x_1 \neq x_2$ ta có :

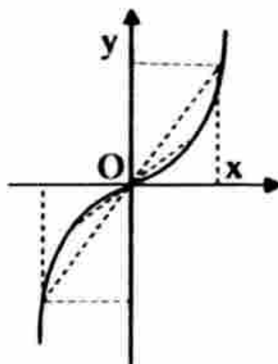
$f(x_2) - f(x_1) = (x_2^3 - x_1^3) + (x_2 - x_1) = (x_2 - x_1)(x_2^2 + x_2x_1 + x_1^2 + 1)$

$$\Rightarrow \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = x_2^2 + x_2x_1 + x_1^2 + 1$$

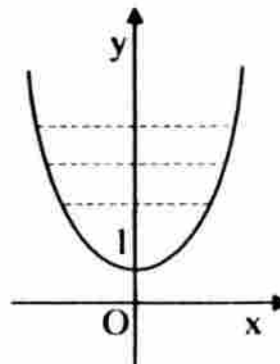
$$\Leftrightarrow \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} = \frac{1}{2}[(x_1+x_2)^2 + x_1^2 + x_2^2 + 2] > 0$$

$\Rightarrow$ Hàm số đồng biến trên R.

(Đồ thị nhận trục gốc toạ độ O làm tâm đối xứng. Dáng điệu đồ thị như hình 2.1).



Hình 2.1



Hình 2.2

b) Tập xác định R

Rõ ràng với mọi $x \in \mathcal{D}$ ta có $-x \in \mathcal{D}$ và $f(-x)=(-x)^2+1=f(x)$

$\Rightarrow y=f(x)$ là hàm số chẵn.

Với mọi $x_1, x_2 \in R$: $x_1 \neq x_2$ ta có :

$f(x_2) - f(x_1) = (x_2^2 - x_1^2) = (x_2 - x_1)(x_2 + x_1) \Rightarrow \dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} = x_2+x_1$

Với mọi $x_2, x_1 \in (-\infty; 0)$ ta có $x_2 + x_1 < 0 \Rightarrow \dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} < 0$

$\Rightarrow$ f(x) nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 0)$

Với mọi $x_2, x_1 \in (0; +\infty)$ ta có $x_2 + x_1 > 0 \Rightarrow \dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} > 0$

$\Rightarrow$ f(x) đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$

(Đồ thị nhận trục Oy làm trục đối xứng. Dáng điệu đồ thị như hình 2.2).

Thí dụ 12

Xác định m để đồ thị hàm số $y = f(x) = mx + (m-1)x^2 + 2\sqrt{x^2-1}$ có trục đối xứng là Oy.

Lời giải

• Điều kiện cần : Ta có $f(1) = 2m - 1$, $f(-1) = -1$. Điều kiện cần để f(x) là hàm số chẵn là $f(1) = f(-1) \Leftrightarrow 2m - 1 = -1 \Leftrightarrow m = 0$.

• Điều kiện đủ : Với m = 0, hàm số trở thành $y = f(x) = -x^2 + 2\sqrt{x^2-1}$

Tập xác định : $\mathcal{D}=(-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$

Rõ ràng với mọi $x \in \mathcal{D} \Rightarrow -x \in \mathcal{D}$ và $f(-x) = f(x) \Rightarrow y = f(x)$ là hàm số chẵn

$\Rightarrow$ Đồ thị nhận Oy làm trục đối xứng.

Vậy m = 0 là giá trị duy nhất thoả mãn yêu cầu bài toán.

Thí dụ 13

Cho f(x) là hàm số có tập xác định trên $\mathcal{D}$ thoả mãn $x \in \mathcal{D}$ thì $-x \in \mathcal{D}$.

Chứng minh rằng :

a) Tồn tại các hàm số h(x) là hàm số chẵn, g(x) là hàm số lẻ sao cho

$$f(x) = h(x) + g(x).$$

b) Cách phân tích f(x) = h(x) + g(x) ở câu a) là duy nhất.

Lời giải

a) Với mọi f(x) ta có : $f(x) = \frac{1}{2}[f(x) + f(-x)] + \frac{1}{2}[f(x) - f(-x)]$.

Gọi $h(x) = \frac{1}{2}[f(x) + f(-x)]$, $g(x) = \frac{1}{2}[f(x) - f(-x)]$

Dễ dàng thấy h(x) là hàm chẵn, còn g(x) là hàm lẻ và f(x) = h(x) + g(x) *(đpcm)*

b) Giả sử có cặp h'(x), g'(x) thoả mãn yêu cầu bài toán, tức là f(x) = h'(x) + g'(x) trong đó h'(x) chẵn, g'(x) lẻ.

Ta có $f(-x) = h'(-x) + g'(-x) = h'(x) - g'(x)$.

Xét hệ $\begin{cases} h'(x) + g'(x) = f(x) \\ h'(x) - g'(x) = f(-x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} h'(x) = \frac{1}{2}[f(x) + f(-x)] \\ g'(x) = \frac{1}{2}[f(x) - f(-x)] \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} h'(x) = h(x) \\ g'(x) = g(x) \end{cases}$. Vậy cách phân tích nói ở câu a) là duy nhất *(đpcm)*.

Thí dụ 14

Cho a, b là các số thực cho trước. Xác định tất cả các hàm số f(x) thoả mãn mỗi một tính chất sau đây :

1) $f(a - x) = f(x)$, với mọi $x \in R$.

2) $f(a - x) + f(x) = b$, với mọi $x \in \mathbf{R}$.

Lời giải

Đặt $x = \frac{a}{2} - t$, $t \in R$ suy ra $t = \frac{a}{2} - x$ và $a - x = \frac{a}{2} + t$. Ta có

1) $f(a-x) = f(x), \forall x \in R \Leftrightarrow f\left(\frac{a}{2} + t\right) = f\left(\frac{a}{2} - t\right), \forall t \in R$ (*)

Đặt $g(t) = f\left(\frac{a}{2} + t\right)$ khi đó (*) $\Leftrightarrow g(t) = g(-t), \forall t \in \mathbf{R} \Leftrightarrow g(t)$ là hàm số chẵn trên R.

Vậy $f(x) = g\left(x - \frac{a}{2}\right)$ với g(x) là một hàm số chẵn tuỳ ý xác định trên R.

2) $f(a-x) + f(x) = b, \forall x \in R \Leftrightarrow f\left(\frac{a}{2} + t\right) - \frac{b}{2} = \frac{b}{2} - f\left(\frac{a}{2} - t\right), \forall t \in R.$ (**)

Đặt $h(t) = f\left(\frac{a}{2} + t\right) - \frac{b}{2}$ khi đó (**) $\Leftrightarrow h(t) = -h(-t), \forall t \in \mathbf{R} \Leftrightarrow h(t)$ là hàm số lẻ trên R.

Vậy $f(x)= h\left(x-\dfrac{a}{2}\right)+\dfrac{b}{2}$ với g(x) là một hàm số chẵn tuỳ ý xác định trên R.

Bài toán 4. Số đồ thị đi qua một điểm

> **Bài toán**
>
> Cho họ đồ thị $(\mathscr{C}_m)$: y=f(m, x) phụ thuộc tham số m.
>
> Tìm quỹ tích những điểm trong mặt phẳng toạ độ có đúng k đồ thị của họ $(\mathscr{C}_m)$ đi qua.

CÁCH GIẢI

- Gọi $M(x_0; y_0)$ là một điểm bất kỳ trong mặt phẳng.
  Xem $y_0 = f(m; x_0)$ (*) là phương trình với ẩn là m.

Rõ ràng số nghiệm của phương trình (*) bằng đúng số đồ thị của họ $(\mathscr{C}_m)$ đi qua điểm M.

- M là điểm có đúng k đồ thị của họ $(\mathscr{C}_m)$ đi qua khi và chỉ khi phương trình (*) có đúng k nghiệm phân biệt.

Đặc biệt :

+ Phương trình (*) nghiệm đúng ∀m, khi đó điểm M được gọi là *điểm cố định* của họ đồ thị $(\mathscr{C}_m)$.

+ Phương trình (*) vô nghiệm, khi đó điểm M được gọi là *điểm tránh* hay là *điểm không bao giờ đi qua*) của họ đồ thị $(\mathscr{C}_m)$

1. Điểm cố định của họ đồ thị

> **Thí dụ 15**
>
> Tìm điểm cố định của họ đồ thị $(\mathscr{C}_m)$: $y=\dfrac{x^2+mx-2}{x-m}$ $(m \neq \pm 1)$ (1)

Lời giải

Điều kiện $x \neq m$

Viết lại (1) $\Rightarrow x^2+mx-2=y(x-m) \Leftrightarrow (x+y)m+x^2-xy-2=0$ (2)

- (x; y) là điểm cố định của họ $(\mathscr{C}_m)$ ⇔ Phương trình (2) nghiệm với mọi m

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y=0 \\ x^2-xy-2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-x \\ x^2=1 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} (x=1; y=-1) \\ (x=-1; y=1) \end{array}\right.$$

Để ý : $m \neq x \Rightarrow m \neq \pm 1$

Vậy khi m thay đổi, $m \neq \pm 1$, họ đồ thị $(\mathscr{C}_m)$ luôn đi qua hai điểm cố định A(1; −1) và B(−1; 1)

Bạn cần biết thêm : Khi m = 1, đồ thị $(\mathscr{C}_1)$ đi qua B, không đi qua A.

Khi m = −1, đồ thị $(\mathscr{C}_{-1})$ đi qua A, không đi qua B.

Thí dụ 16
Tìm điểm cố định của họ đồ thị ($\mathscr{C}_m$) : $y = x^3 + (m + |m|)x^2 - 4x - 4(m + |m|)$

Lời giải

Tập xác định R.
Đặt $t = (m + |m|)$, hàm số trở thành $y = x^3 + tx^2 - 4x - 4t$
$\Leftrightarrow y = (x^2 - 4)t + x^3 - 4x \Leftrightarrow (x^2 - 4)t + x^3 - 4x - y = 0$ (1)

- $(x; y)$ là điểm cố định của ($\mathscr{C}_m$) $\Leftrightarrow$ Phương trình (1) nghiệm $\forall t$

$\Leftrightarrow$ (x,y) là nghiệm của $\begin{cases} x^2 - 4 = 0 \\ x^3 - 4x - y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} (x = 2; y = 0) \\ (x = -2; y = 0) \end{array}\right.$

Vậy khi m thay đổi, họ đồ thị ($\mathscr{C}_m$) luôn đi qua 2 điểm cố định là A(2; 0) và B(−2; 0).

Thí dụ 17
Cho họ đồ thị ($\mathscr{C}_m$) : $y = (m + 2)x^2 - 2(m - 4)x - 15$. (1)
a) Tìm điểm cố định của họ đồ thị .
b) Viết phương trình đường thẳng đi qua các điểm cố định ấy.

Lời giải

a) Tập xác định R.
Viết lại (1) $\Leftrightarrow mx(x - 2) + 2x^2 + 8x - 15 - y = 0$
Toạ độ điểm cố định là nghiệm của hệ :

$\begin{cases} x(x - 2) = 0 \\ 2x^2 + 8x - 15 - y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(x - 2) = 0 \\ x(x - 2) + 12x - 15 - y = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \text{ hoặc } x = 2 \\ y = 12x - 15 \quad (2) \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} (x = 0; y = -15) \\ (x = 2; y = 9) \end{array}\right.$.

Vậy tập hợp các điểm cố định của họ ($\mathscr{C}_m$) gồm hai điểm là A(0; −15) và B(2; 9).

b)Toạ độ hai điểm A và B đều là nghiệm của phương trình (2) nên phương trình (2) : $y=12x-15$ là phương trình đường thẳng phải tìm.

Lời bình

$(x_0; y_0)$ *nghiệm* $y_0=f(m, x_0)$ (*) *với mọi m suy ra* $(x_0; y_0)$ *ắt nghiệm* (*) *với những giá trị riêng của m.*

Đó là cơ sở để ta trình bày lời giải bài toán theo ***theo điều kiện cần và đủ*** *như sau :*

- *Điều kiện cần* : $y = (m + 2)x^2 - 2(m - 4)x - 15$
  + khi $m = -2$, phương trình (1) trở thành $y = 12x - 15$
  + Khi $m = -1$, phương trình (1) trở thành $y = x^2 + 10x - 15$.

Ta có hệ $\begin{cases} y = 12x - 15 \\ y = x^2 + 10x - 15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 12x - 15 \\ x^2 - 2x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 12x - 15 \\ x = 0 \vee x = -2 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}(x = 0; y = -15)\\ (x = 2; y = 9)\end{array}\right.$$

• *Điều kiện đủ* : Thay (x=0; y=−15) sẽ có (1) ⇔ 0.m=0, đúng ∀m

Tương tự cặp (x=1; y=9) cũng nghiệm phương trình (1) ∀m.

Vậy (0; −15) và (2; 9) là hai điểm cố định duy nhất của họ ($\mathcal{C}_m$).

Thí dụ 18

Chứng minh đồ thị hàm số sau có 3 điểm cố định thẳng hàng

$(\mathcal{C}_m): y = (m + 1)x^3 - 3(m + 1)x^2 - 6(m - 1)x + 8m.$ (1)

Lời giải

Viết lại (1) ⇔ $m(x^3 - 3x^2 - 6x+8)+x^3 - 3x^2+6x - y=0$

Toạ độ điểm cố định là nghiệm của hệ $\begin{cases}x^3 - 3x^2 - 6x + 8 = 0\\ x^3 - 3x^2 + 6x - y = 0\end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}x^3 - 3x^2 - 6x + 8 = 0\\ (x^3 - 3x^2 - 6x + 8) + 12x - 8 - y = 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(x - 1)(x + 2)(x - 4) = 0 & (2)\\ y = 12x - 8 & (3)\end{cases}$$

Thấy rằng hệ (2), (3) có 3 nghiệm phân biệt, ứng với x=1, x=−2, x=4.

⇒ Họ đồ thị có 3 điểm cố định (4)

Phương trình (2) chứng tỏ cả 3 điểm cố định ấy đều thuộc đường thẳng $y=12x - 8$. (5)

Từ (4), (5) kết luận khi m thay đổi, họ đồ thị ($\mathcal{C}_m$) luôn có 3 điểm cố định thẳng hàng. (đpcm)

2. Điểm tránh của họ đồ thị

Thí dụ 19

Tìm *điểm tránh* của họ đồ thị $(\mathcal{H}_m): y = \dfrac{mx - 4}{x - m}$ (1)

Lời giải

Viết lại (1) ⇒ $mx - 4 = y(x - m) \Leftrightarrow (x + y)m = 4 + xy$ (2)

K(x; y) là *điểm tránh* của họ đồ thị ($\mathcal{H}_m$) khi và chỉ khi phương trình (2) vô nghiệm đối với m $\Leftrightarrow \begin{cases}x + y = 0\\ 4 + xy \neq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y = -x\\ 4 - x^2 \neq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y = -x\\ x \neq \pm 2\end{cases}$

Vậy tập hợp các điểm *điểm tránh* của họ đồ thị ($\mathcal{H}_m$) là phần còn lại đường thẳng (Δ) y=−x sau khi đã bỏ đi hai điểm A(−2; 2), B(2; −2).

Thí dụ 20[P].

Tìm trên trục hoành các *điểm tránh* của họ parabol

$(\mathcal{P}_m): y = (m - 2)x^2 - (2m - 11)x - 3(m + 5).$ (1)

Lời giải

Viết lại (1) <=> $y = m(x^2 - 2x - 3) - 2x^2 + 11x - 15$.

Gọi K(a; 0) là một điểm trên trục Ox. K là là *điểm tránh* của họ parabol $(\mathcal{P}_m)$ <=> Phương trình $m(a^2 - 2a - 3) - 2a^2 + 11a - 15 \neq 0$ với mọi m

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - 2a - 3 = 0 \\ 2a^2 - 11a + 15 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a+1)(a-3) = 0 \\ (a-3)(5-2a) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow a + 1 = 0 \Leftrightarrow a = -1.$$

Vậy K=(−1; 0) là *điểm tránh* duy nhất của họ parabol $(\mathcal{P}_m)$ trên trục Ox.

Thí dụ 21 (Đ55)

Tìm *điểm tránh* của họ đồ thị $(\mathcal{H}_m)$: $y=\dfrac{2x^2 + (m-2)x}{x-1}$

Lời giải

Xét phương trình $y=\dfrac{2x^2 + (m-2)x}{x-1}$ với ẩn là m. (1)

K(x; y) là *điểm tránh* của họ đồ thị $(\mathcal{H}_m)$ khi và chỉ khi phương trình (1) vô nghiệm đối với m.

Trường hợp 1 : Phương trình (1) vô nghiệm <=> $x-1=0$ <=> $x=1$

=> Đường thẳng (Δ_1) : $x=1$ là một tập hợp cần tìm của K. (2)

Trường hợp 2 : $x-1\neq 0$ <=> $x\neq 1$.

Viết lại (1) <=> $y(x-1)=2x^2+(m-2)x$ <=> $mx+2x^2-2x-y(x-1)=0$ (3)

Phương trình (3) vô nghiệm <=> $\begin{cases} x = 0 \\ 2x^2 - 2x - y(x-1) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y \neq 0 \end{cases}$

<=> Đường thẳng (Δ_2) : x=0 trừ gốc toạ độ O(0; 0) là một tập hợp cần tìm của K. (4)

Từ (2), (4) kết luận : Tập hợp các điểm *điểm tránh* của họ đồ thị $(\mathcal{H}_m)$ là đường thẳng (Δ_1) và (Δ_2) trừ điểm O(0; 0).

BÀI TẬP

Bài 1. Tìm tập xác định của mỗi hàm số sau :

1) $y=\dfrac{x}{x+1}$, 2) $y=\sqrt{2+x}$, 3) $y=\dfrac{2x+5}{x^2-x+3}$, 4) $y=\dfrac{2x+3}{\sqrt{9-4x^2}}$

Bài 3. Tìm tập xác định của mỗi hàm số sau :

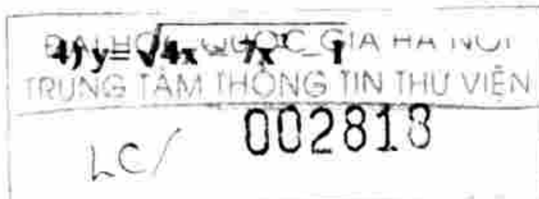
1) $y=\sqrt[3]{13x^2-2x+1}$, 2) $y=\dfrac{\sqrt{x+1}}{x^2-4}$,

3) $y=\dfrac{x^2+2x}{x^2+x+1}$, 4) $y=\dfrac{\sqrt{x^2-9}}{|x-2|-x+2}$

Bài 4. Tìm tập xác định của mỗi hàm số sau :

1) $y=\sqrt{x+2(1-\sqrt{x+1})}$, 2) $y=\sqrt{|x+1|+2x+4x^2+1}$

3) $y=\dfrac{1}{\sqrt{12x-9x^2-4}}$, 4) $y=\sqrt{4x^2-7x-1}$



Bài 5. Tìm tập xác định của hàm số $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2-4}}{|x^2+2x-3|+3-2x-x^2}$

Bài 6. Tìm tập xác định của hàm số : $y=\sqrt{3x^2-6x+5+\dfrac{2x-3}{x^2-3x+3}}$

Bài 7. Tìm m để mỗi hàm số sau đều xác định trên $D=[1;2)$:

a) $y=\dfrac{1}{x+3m}$, b) $y=\sqrt{6mx-m^2x^2-5}$

Bài 8. Khảo sát sự biến thiên của hàm số $y=f(x)=\dfrac{1}{x}$

Bài 9. Xét tính chẵn–lẻ và sự biến thiên của mỗi hàm số sau :

a) $y=f(x)=\dfrac{x^2}{1-x^2}$, b) $y=f(x)=\sqrt[3]{1-x}-\sqrt[3]{1+x}$

Bài 10. Xác định m để đồ thị hàm số $y=f(x)=x^3+(m^2-1)x^2+m-1$ có tâm đối xứng là gốc toạ độ.

Bài 11. Những điểm nào trên đường thẳng x=1 là điểm tránh của đồ thị

$$y=\frac{(3m+1)x-m^2+m}{x+m}$$ **(Đ 67)**

Bài 12. Tìm trên $(\mathcal{P})$: $y=x^2$ các điểm tránh của đồ thị

$$y=2x^3-3(m+3)x^2+18mx-8$$ **(Đ28)**

§2 HÀM SỐ BẬC HAI

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. Định nghĩa

***Hàm số bậc hai** là hàm số có dạng* $y=ax^2+bx+c$ *trong đó a, b, c là các hằng số và $a\neq 0$.*

2. Đồ thị hàm số $y=ax^2+bx+c$.

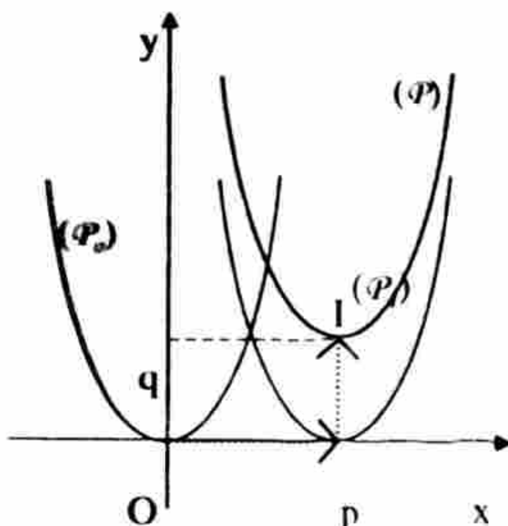
Viết lại $y=ax^2+bx+c=a\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2-\dfrac{\Delta}{4a}$

$\Rightarrow$ Hàm số có dạng $y=a(x-p)^2+q$

với $p=-\dfrac{b}{2a}$, $q=-\dfrac{\Delta}{4a}$

Rõ ràng ta sẽ thu được đồ thị $(\mathcal{P})$: $y=a(x-p)^2+q$ bằng cách tịnh tiến đồ thị parabol $(\mathcal{P}_0)$: $y=ax^2$ liên tiếp hai lần như sau :

– *Lần 1*: Tịnh tiến $(\mathcal{P}_0)$ sang phải p đơn vị nếu p>0, sang trái |p| đơn vị nếu p < 0 sẽ có đồ thị $(\mathcal{P}_1)$: $y=a(x-p)^2$



Hình 3

– *Lần 2* : Tịnh tiến $(\mathcal{P}_1)$ lên trên q đơn vị nếu $q > 0$, xuống dưới |q| đơn vị nếu $q<0$ sẽ có đồ thị $(\mathcal{P})$: $y = a(x - p)^2 + p$ hay là $y = ax^2 + bx + c$.

Điều này khẳng định :

• **Đồ thị $(\mathcal{P})$** của hàm số $y=ax^2+bx+c$ là một đường parabol *giống hệt* parabol $(\mathcal{P}_1)$: $y = ax^2$, có đỉnh $I\left(-\frac{b}{2a}; -\frac{\Delta}{4a}\right)$, trục đối xứng $x=-\frac{b}{2a}$ và bề lõm hướng lên trên khi $a>0$, xuống dưới khi $a < 0$. (*)

3 Sự biến thiên của hàm số $y=ax^2+bx+c$

Từ đồ thị của hàm bậc hai, ta suy ra bảng biến thiên sau:

$a > 0$	x	$-\infty$	$-\frac{b}{2a}$	$+\infty$
	y	$+\infty$ ↘	$-\frac{\Delta}{4a}$	↗ $+\infty$

$a < 0$	x	$-\infty$	$-\frac{b}{2a}$	$+\infty$
	y	$+\infty$ ↗	$-\frac{\Delta}{4a}$	↘ $+\infty$

• **Khi $a > 0$,** *hàm số nghịch biến trên khoảng* $\left(-\infty; -\frac{b}{2a}\right)$, *đồng biến trên khoảng* $\left(-\frac{b}{2a}; +\infty\right)$ *và có giá trị nhỏ nhất là* $-\frac{\Delta}{4a}$ *khi* $x=-\frac{b}{2a}$.

• **Khi $a > 0$,** *hàm số đồng biến trên khoảng* $\left(-\infty; -\frac{b}{2a}\right)$, *nghịch biến trên khoảng* $\left(-\frac{b}{2a}; +\infty\right)$ *và có giá trị lớn nhất là* $-\frac{\Delta}{4a}$ *khi* $x=-\frac{b}{2a}$.

Chú ý 1. Cách vẽ parabol

• **Xác định đỉnh parabol**

• **Xác định trục đối xứng** và hướng bề lõm của parabol.

• **Xác định một số điểm** cụ thể của parabol (chẳng hạn, giao của parabol với các trục toạ độ và các điểm đối xứng với chúng qua trục đối xứng.

Chú ý 2. Bạn dễ dàng kiểm nghiệm các kết quả sau :

• **Phương trình parabol** có đỉnh đặt trên đường thẳng $y=\beta$ có dạng

$$f(x)=m(x-a)^2+\beta \quad (m\neq 0) \qquad \text{h. 4.1)}$$

Đặc biệt :

Phương trình parabol có đỉnh đặt tại I(α; β) có dạng

$$f(x) = m(x-\alpha)^2+\beta \quad (m\neq 0) \qquad \text{(h. 4.1)}$$

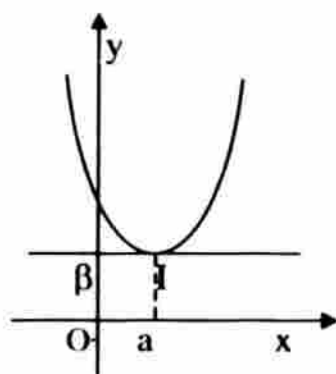
• Phương trình parabol đi qua hai điểm $A(x_A ; y_A)$, $B((x_B; y_B)$ thuộc đường thẳng $y = px + q$ có dạng

$$f(x) = m(x - x_A)(x - x_B) + px + q \quad (m\neq 0) \qquad \text{(h. 4.2)}$$

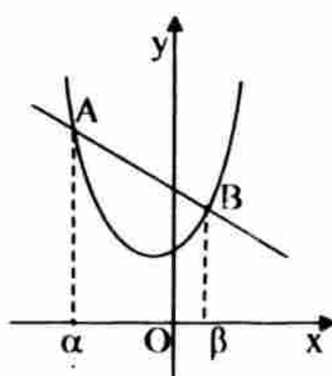
Đặc biệt :

Phương trình parabol đi qua hai điểm có tung độ bằng nhau : A(α; γ), B((β; γ) có dạng

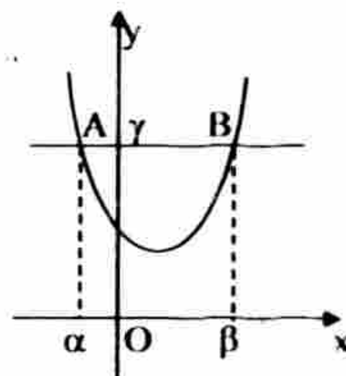
$$f(x) = m(x - \alpha)(x - \beta) + \gamma \ (m\neq 0) \qquad \text{(h. 4.3)}$$



Hình 4.1



Hình 4.2



Hình 4.3

Bài toán 1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số $y = ax^2 + bx + c$.

Thí dụ 1
Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số $y = x^2 - 3x - 4$.

Lời giải

• Tập xác định R

• Sự biến thiên :

Ta có $a = 1 > 0$, $-\dfrac{b}{2a} = \dfrac{3}{2}$, $-\dfrac{\Delta}{4a} = -\dfrac{25}{4}$. Vậy đồ thị hàm số $y = x^2 - 3x - 4$ là parabol có đỉnh $I\left(\dfrac{3}{2};-\dfrac{25}{4}\right)$, nhận đường thẳng $x=\dfrac{3}{2}$ làm tâm đối xứng và bề lõm hướng lên trên.

Suy ra : Hàm số nghịch biến trên khoảng $\left(-\infty; \dfrac{3}{2}\right)$đồng biến trên khoảng $\left(\dfrac{3}{2}; +\infty\right)$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
y	$+\infty$	↘	$-\frac{25}{4}$	↗	$+\infty$

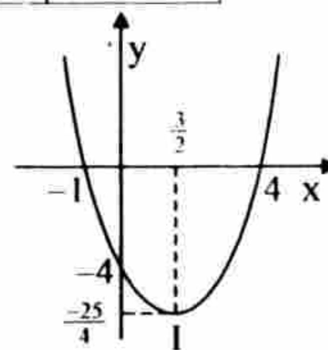
Giá trị nhỏ nhất bằng $-\frac{25}{4}$, đạt được khi $x=\frac{3}{2}$.

- **Đồ thị**

  Một số điểm khác thuộc đồ thị

x	–1	0	3	4
y	0	–4	–4	0

"Nối" các điểm đó lại ta được parabol như hình dưới đây (h. 5)



Hình 5

Thí dụ 2

Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số $y = F(x) = \begin{cases} -x + \frac{3}{2}, \text{ nếu } x \le -\frac{1}{2} \\ -2x^2 + x + 3, \text{ nếu } x > -\frac{1}{2} \end{cases}$

Lời giải

- **Xét hàm số** $f_1(x) = -x + \frac{3}{2}$ trên khoảng $\mathcal{D}_1=\left(-\infty;-\frac{1}{2}\right]$.

Đó là hàm số bậc nhất có $a = -1 < 0 \Rightarrow y=f_1(x)$ **nghịch biến trên** $\mathcal{D}_1$.

Tại $x=-\frac{1}{2}$, $f\left(-\frac{1}{2}\right) = 2$. Tại $x=\frac{3}{2}$, $f\left(\frac{3}{2}\right)=0$

Đồ thị là đường thẳng đi qua hai điểm $A\left(-\frac{1}{2};\ 2\right)$, $B\left(\frac{3}{2};\ 0\right)$

- **Xét hàm số** $f_2(x)=-2x^2+x+\frac{3}{2}$ trên khoảng $\mathcal{D}_2=\left(-\frac{1}{2};+\infty\right)$.

Ta có $a = -2 < 0$, $-\frac{b}{2a} = \frac{1}{4}$, $-\frac{\Delta}{4a} = \frac{25}{8}$. Vậy đồ thị hàm số $f_2(x) = -2x^2 + x + \frac{3}{2}$ là parabol có đỉnh $I\left(\frac{1}{4};\frac{25}{8}\right)$, nhận đường thẳng $x=\frac{1}{4}$ làm tâm đối xứng và bề lõm hướng xuống dưới.

Suy ra : Hàm số $y= f_2(x)$ đồng biến trên khoảng $\left(-\frac{1}{2};\frac{1}{4}\right)$, nghịch biến trên khoảng $\left(\frac{1}{4};+\infty\right)$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		$\frac{1}{4}$		$+\infty$
$f_1(x)$		↘					
$f_2(x)$				↗		↘	
F(x)	$+\infty$	↘	2	↗	$\frac{25}{8}$	↘	$-\infty$

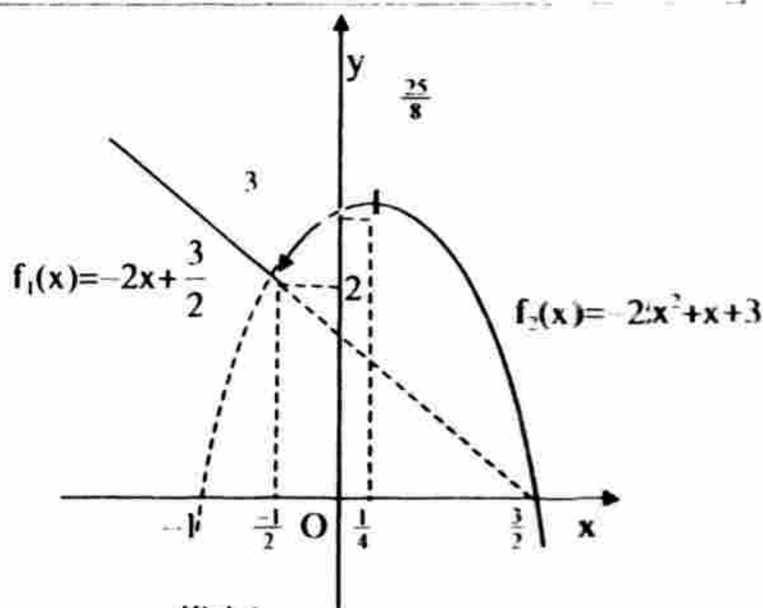
Đồ thị (h. 7)

Trên hình vẽ :

• Nét liền– đậm là đồ thị hàm số $y = F(x)$

• Nét đứt–mảnh là phần của $y = f_1(x)$ và $y = f_2(x)$ không thuộc đồ thị $y=F(x)$.

Lời giải để lại vết phần này để bạn dễ theo dõi.



Hình 6

Chú ý : Khi vẽ đồ thị, nếu không yêu cầu hệ trục toạ độ *trực chuẩn*, thì đơn vị độ dài trên hai trục *không nhất thiết phải cùng một tỉ lệ xích*.

Thí dụ 3

Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số $F(x) = x^2 - 2x + \sqrt{4x^2 - 12x + 9}$ (1)

Lời giải

Viết lại (1) <=> $F(x) = x^2 - 2x + \sqrt{(2x-3)^2}$ <=> $y = x^2 - 2x + |2x - 3|$

$$<=> F(x) = \begin{cases} x^2 - 4x + 3, \text{ nếu } x < \dfrac{3}{2} \\ x^2 - 3, \text{ nếu } x > \dfrac{3}{2} \end{cases}$$

• Xét parabol $(\mathcal{P}_1)$: $f_1(x) = x^2 - 4x + 3$ có $a = 1 > 0$, đỉnh $I_1(2; -1)$ không thuộc khoảng $\left(-\infty; \dfrac{3}{2}\right]$. Tại $x = \dfrac{3}{2}$, $f_1(x) = -\dfrac{3}{4}$.

Suy ra : Bề lõm của $(\mathcal{P}_1)$ **hướng lên trên**, hàm số $f_1(x)$ nghịch biến trên khoảng $\left(-\infty; \dfrac{3}{2}\right]$

• Xét parabol $(\mathcal{P}_2)$: $f_2(x) = x^2 + 3$ có $a = 1 > 0$, đỉnh $I_2(0; 3)$ không thuộc khoảng $\left(\dfrac{3}{2}; +\infty\right)$

Suy ra : Bề lõm của $(\mathcal{P}_2)$ **hướng lên trên**, hàm số $f_2(x)$ đồng biến trên khoảng $\left(\dfrac{3}{2}; +\infty\right)$

• Bảng biến thiên

x	$-\infty$	$\frac{3}{2}$	$+\infty$
$f_1(x)$	↘		(bỏ)
$f_2(x)$	(bỏ)		↗
F(x)	$+\infty$ ↘	$-\frac{3}{4}$	↗ $+\infty$

• Đồ thị : Ta lập bảng toạ độ của $(\mathcal{P}_1)$ và $(\mathcal{P}_2)$ để vẽ chính xác đồ thị hơn.

$(\mathcal{P}_1)$	x	1	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{2}$	3
	$y=f_1(x)$	0	$\frac{-3}{4}$	$\frac{-3}{4}$	0

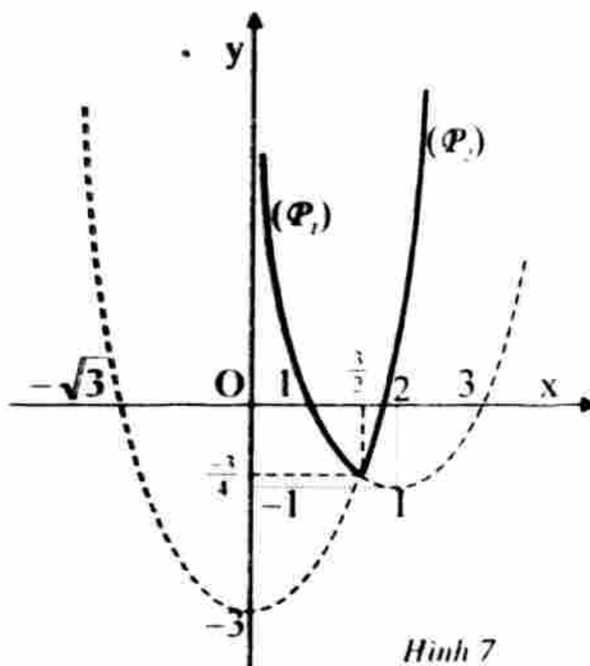
$(\mathcal{P}_2)$	x	$-\sqrt{3}$	-1	0	1	$\frac{3}{2}$	$\sqrt{3}$
	$y=f_1(x)$	0	-2	-3	-2	$\frac{-3}{4}$	0

Trên hình vẽ (h. 7):

- *Nét liền– đậm là đồ thị hàm số y=F(x)*
- *Nét đứt–mảnh là phần của(𝒫)*

(𝒫) không thuộc đồ thị y=F(x).

Lời giải không xoá vết phần này để bạn dễ theo dõi



Hình 7

Bài toán 2. Viết phương trình parabol

> **Thí dụ 4**
> Viết phương trình parabol (𝒫), biết rằng (𝒫) đi qua ba điểm A(0; 2), B(–1; 7), C(1; 1)

Lời giải

Phương trình parabol (𝒫) có dạng $f(x)=ax^2+bx+c,(a\neq 0)$ (1)

• (𝒫) đi qua ba điểm A, B, C ⇔ Toạ độ các điểm ấy thoả mãn phương trình (1),

tức là $\begin{cases} a.0+b.0+c=2 \\ a(-1)^2+b(-1)+c=7 \\ a1.+b.1+c=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c=2 \\ a-b=5 \\ a+b=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c=2 \\ b=-3 \text{(thích hợp)}. \\ a=2 \end{cases}$ Thay vào (1) ta có phương trình của (𝒫) là $f(x)=2x^2-3x+2$.

> **Thí dụ 5**
> Viết phương trình parabol (𝒫) : $f(x)=ax^2+bx+c$ đi qua ba điểm A(0; –1), B(1; –1), C(–1; 1)

Lời giải

Để ý : $y_A=y_B=-1 \Rightarrow$ Phương trình (𝒫) có dạng $f(x)=m(x-x_A)(x-x_B)+y_A$ hay $f(x)=m(x-0)(x-1)-1 \Leftrightarrow f(x)=mx(x-1)-1$ (1)

Điểm $C\in(\mathcal{P}) \Leftrightarrow f(-1)=1 \Leftrightarrow 2m-1=1 \Leftrightarrow m=1$. Thay vào (1) có $f(x)=x(x-1)-1 \Leftrightarrow f(x)=x^2-x-1$. Đó là phương trình parabol cần tìm.

Lời bình.

1) **Lời giải** trên dựa vào chú ý 2 trong mục I§2 ở trên. Tất nhiên bài toán vẫn có **lời giải theo** "*lối mòn*" như Thí dụ 4. Các bạn theo dõi các thí dụ tiếp theo để tiếp **cận với kỹ** thuật viết phương trình parabol bằng "phương **pháp** chùm".

2) **Nội** dung "*Viết phương trình parabol bằng phương pháp chùm*" đã đăng tải **trên các ấn phẩm** :

* Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ, số 262 tháng 4 năm 1999.

* Chuyên đề nâng cao toán Đại số và Giải tích THPT, Nhà xuất bản ĐHSP, **tác giả Phạm** Quốc Phong.

Thí dụ 6

Viết phương trình parabol ($\mathcal{P}$) có đỉnh đặt tại I(2; 5) và ($\mathcal{P}$) đi qua điểm A(1; 4).

Lời giải

Cách 1 : Phương trình parabol ($\mathcal{P}$) có dạng $f(x) = ax^2 + bx + c$, $(a \neq 0)$ (1)

• **Từ** giả thiết suy ra :

$$\begin{cases} -\dfrac{b}{2a} = 2 \\ f(2) = 5 \\ f(1) = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -4a \\ 4a + 2b + c = 5 \\ a + b + c = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -4a \\ c - 4a = 5 \\ c - 3a = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 4 \\ a = -1 \\ c = 1 \end{cases}$$

(thích hợp). Thay vào (1) ta có phương trình của ($\mathcal{P}$) là $f(x) = -x^2 + 4x + 1$.

Cách 2 : Phương trình parabol ($\mathcal{P}$) có đỉnh đặt tại I(2; 5) là $f(x)=m(x-2)^2+5$. (2)

($\mathcal{P}$) **đi qua** điểm A(1; 4) <=> Toạ độ điểm A thoả mãn **phương trình** (1)

<=> $m(1-2)^2+5=4$ <=> $m=-1$.

Thay $m = -1$ vào (1) ta có phương trình của ($\mathcal{P}$) là $f(x) = -x^2 + 4x + 1$.

Thí dụ 7

Tìm hàm số $f(x)= ax^2 + bx + c$ biết rằng hàm số **đạt cực trị** bằng 1 và đồ thị là **($\mathcal{P}$) đi qua** hai điểm A(2; 0), B(−2; −8).

Lời giải

Cách 1 :

Hàm số đạt cực trị bằng 1 và đồ thị A(2; 0), B(−2; −8) **khi và chỉ khi**

$$\begin{cases} -\dfrac{\Delta}{4a} = 1 \\ f(2) = 0 \\ f(-2) = -8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4ac - b^2 = 4a \\ 4a + 2b + c = 0 \\ 4a - 2b + c = -8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4ac - 4 = 4a \\ 4a + c = -4 \\ b = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ac - 1 = a \\ c = -4(a+1) \\ b = 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -4a(a+1) - 1 = a \\ c = -4(a+1) \\ b = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4a^2 + 5a + 1 = 0 \\ c = -4(a+1) \\ b = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} (a = -1;\ b = 2;\ c = 0) \\ (a = -\dfrac{1}{4};\ b = 2;\ c = -3) \end{array}\right.$$

Vậy các hàm số cần tìm là : $f(x) = -x^2 + 2x$; $f(x) = -\frac{1}{4}x^2 + 2x - 3$.

Cách 2 :

• Hàm số đạt cực trị bằng 1 ⇔ Đồ thị ($\mathcal{P}$) của nó có đỉnh đặt trên đường thẳng y=1 ⇔ Phương trình parabol có dạng $f(x) = m(x - \alpha)^2 + 1$, $m \neq 0$ (1)

• ($\mathcal{P}$) đi qua hai điểm A(2; 0), B(−2; −8) ⇔ Toạ độ điểm A, B thoả mãn phương trình (1) $\Leftrightarrow \begin{cases} m(2-\alpha)^2 + 1 = 0 \\ m(-2-\alpha)^2 + 1 = -8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m(2-\alpha)^2 = -1 \\ m(-2-\alpha)^2 = -9 \end{cases}$ (2)

$\Rightarrow (2+\alpha)^2 = 9(2-\alpha)^2 \Leftrightarrow (2+\alpha)^2 - 9(2-\alpha)^2 = 0$

$\Leftrightarrow [2+\alpha-3(2-\alpha)].[2+\alpha+3(2-\alpha)] = 0 \Leftrightarrow 4(\alpha-1)2(4-\alpha) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \alpha = 1 \\ \alpha = 4 \end{array}\right.$ (3)

• Thay (3) vào (2) : Với $\alpha = 1$ có $m = -1$, với $\alpha = 4$ có $m = -\frac{1}{4}$. (4)

• Thay (4) vào (3) :

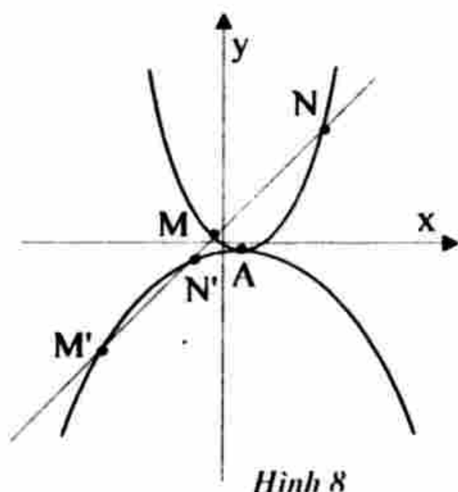
* Với ($\alpha = 1$; $m = -1$) có $f(x) = -(x-1)^2 + 1 \Leftrightarrow f(x) = -x^2 + 2x$.

* Với ($\alpha = 4$; $m = -\frac{1}{4}$) có $f(x) = -\frac{1}{4}(x-4)^2 + 1 \Leftrightarrow f(x) = -\frac{1}{4}x^2 + 2x - 3$.

Vậy các hàm số cần tìm là : $f(x) = -x^2 + 2x$; $f(x) = -\frac{1}{4}x^2 + 2x - 3$.

Thí dụ 8

Viết phương trình parabol ($\mathcal{P}$) có đỉnh là A(1; −2) và ($\mathcal{P}$) chắn trên đường thẳng ($\mathcal{D}$) : y=x+1 một dây cung MN=$\sqrt{34}$ (đơn vị dài).



Hình 8

Lời giải

• Phương trình chùm parabol đỉnh A(1; −2) là ($\mathcal{P}$): $y = m(x-1)^2 - 2$ ($m \neq 0$) (1)

• Phương trình hoành độ giao điểm của ($\mathcal{P}$) và ($\mathcal{D}$) là $m(x-1)^2 - 2 = x + 1$

$\Leftrightarrow mx^2 - (2m+1)x - 3 + m = 0$ (2)

$\Delta = 16m + 1$; $\Delta > 0 \Leftrightarrow m > -\frac{1}{16}$ (3)

Với $0 \neq m > -\frac{1}{16}$, phương trình (2) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 – đó là hoành độ giao điểm M, N của ($\mathcal{P}$) và ($\mathcal{D}$).

• Từ (2) suy ra $(x_1 - x_2)^2 = \frac{\Delta}{m^2}$

• M, N ∈ ($\mathcal{D}$) $\Rightarrow y_1 - y_2 = (x_1+1) - (x_2+1) = x_1 - x_2 \Rightarrow (x_1-x_2)^2 + (y_1-y_2)^2 = 2(x_1-x_2)^2$

$\Rightarrow MN^2 = 2\dfrac{\Delta}{m^2} \overset{MN=\sqrt{34}}{\Leftrightarrow} \dfrac{2\Delta}{m^2} = 34 \Leftrightarrow 17m^2 - 16m - 1 = 0 \Leftrightarrow \{m = 1;\ m = -\dfrac{1}{17}\}$
(thích hợp đk (3))

Thay các giá trị vừa tìm được của m vào (1), ta có hai phương trình parabol cần tìm là:

$(\mathcal{P}_1)$: $y=x^2-2x-1$ (ứng với $m=1$)

$(\mathcal{P}_2)$: $y=-\dfrac{1}{17}(x^2-2x+35)$ (ứng với $m=-\dfrac{1}{17}$)

Thí dụ 9

Viết phương trình parabol $(\mathcal{P})$, biết rằng $(\mathcal{P})$ đi qua điểm A(1; 5) và luôn cắt parabol $(\mathcal{P}_m)$: $y=(m-1)x^2+x-3m+1$ tại các điểm cố định.

Lời giải

• $(x_0; y_0)$ là điểm cố định của $(\mathcal{P}_m)$ ⇔ Phương trình sau nghiệm với mọi m : $y_0=(m-1)x_0^2+x_0-3m+1 \Leftrightarrow (x_0^2-3)m=y_0+x_0^2-x_0-1$. Điều đó xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases} x_0^2 - 3 = 0 \\ y_0 + x_0^2 - x_0 - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0^2 - 3 = 0 \\ y_0 = x_0 - 2 \end{cases}$$

$\Rightarrow y_0 = a(x_0^2-3) + x_0 - 2 \Rightarrow$ Phương trình parabol $(\mathcal{P})$ cắt parabol $(\mathcal{P}_m)$ phải có dạng $y = a(x^2-3) + x - 2$ (2)

• $(\mathcal{P})$ đi qua điểm A(1; 5) ⇔ Toạ độ điểm A thoả mãn phương trình (1)

⇔ $a(1^2-3)+1-2=5 \Leftrightarrow a=-3$ (thích hợp).

Thay $a = -3$ vào (2) có $y = -3(x^2-3) + x - 2 \Leftrightarrow y = -3x^2 + x + 7$ (3)

Thấy rằng (1) luôn có hai nghiệm đối với x_0 nên (3) là phương trình parabol cần tìm.

BÀI TẬP

Bài 1[(P)]**. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của mỗi hàm số sau :**

a) $f(x)=\begin{cases} 2x-7 & \text{nếu } x \le 2 \\ x^2-2x-3 & \text{nếu } x > 2 \end{cases}$ b) $y = |x^2 + 3x + 4|$

Bài 2[(P)]. Viết phương trình parabol qua ba điểm A(−1; 3), B(3, 2), C(4, 3)

Bài 3. Tìm parabol $f(x)=ax^2+bx+2$ trong mỗi trường hợp sau

a) đi qua hai điểm M(1; 5) và N(−2; 8)

b) đi qua điểm A(3; 4) và có trục đối xứng là $x=-\dfrac{3}{2}$

c) đi qua điểm B(−1; 6) và đỉnh đặt trên đường thẳng $y=-\dfrac{1}{4}$

Bài 4. Tìm hàm số $f(x)=ax^2+bx+c$ biết rằng hàm số nhận giá trị nhỏ nhất bằng 4 tại $x = 2$ và đồ thị hàm số đi qua điểm A(0; 6)

Bài 5. Cho hàm số $f(x)=x^2+2(m-1)x+m^2-3m+4$.

a) Tìm m để hàm số có giá trị nhỏ nhất bằng 1.

☐ m=−1 ☐ m=2 ☐ m=3 ☐ khác

b) Khảo sát và vẽ đồ thị khi m=2. Gọi đồ thị tương ứng là ($\mathcal{P}_2$)

c) Viết phương trình đường thẳng ($\mathcal{D}$) đi qua giao điểm của ($\mathcal{P}_2$) với Oy và vuông góc với đường thẳng ($\mathcal{D}'$) : $y=-\frac{x}{2}+5$

☐ y=x+2 ☐ y=−x−2 ☐ y=2x+2 ☐ khác

Bài 6[P]. Viết phương trình parabol ($\mathcal{P}$) có đỉnh là I(−1; 3) và ($\mathcal{P}$) chắn trên đường thẳng ($\mathcal{D}$) : y = 2x + 1 một dây cung AB=10 (đơn vị dài)

Bài 7[P]. Viết phương trình parabol ($\mathcal{P}$), biết rằng ($\mathcal{P}$) cắt hypebol ($\mathcal{H}_m$) : $y=\frac{1}{x-4}$ tại các điểm có hoành độ nghiệm đúng phương trình $x^3-4x^2-5x=0$

Bài 8[P]. Viết phương trình parabol ($\mathcal{P}$) có đỉnh đặt trên đường thẳng ($\mathcal{D}$) : $y=\frac{-3}{4}$ và ($\mathcal{P}$) luôn cắt hypebol ($\mathcal{H}_m$) : $y=\frac{2x^2+(m-1)x+m}{x-m}$ tại các điểm cố định.

Chương II
PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI

§1. PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI

1. Định nghĩa

***Phương trình bậc hai** một ẩn là phương trình có dạng $ax^2 + bx + c = 0$ (1) trong đó a, b, c là các số đã cho và $a \neq 0$*

Biểu thức $\Delta = b^2 - 4ac$ được gọi là *biệt thức* của phương trình (1).

Đặt b = 2b' (b' là một số nào đó) thì $\Delta = 4(b'^2 - ac)$.

Biểu thức $\Delta' = b'^2 - ac$ được gọi là *biệt thức thu gọn* của phương trình (1).

Như vậy $\Delta = 4\Delta'$.

2. Công thức nghiệm

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad (2)$$
$$\Delta = b^2 - 4ac; \ (\Delta' = b'^2 - ac)$$

$\Delta<0$ ($\Delta'<0$), (2) vô nghiệm.

$\Delta=0$ ($\Delta'=0$), (2) có nghiệm kép $x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$ (hay $-\frac{b'}{a}$)

$\Delta>0$ ($\Delta'>0$), (2) có hai nghiệm phân biệt

$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \left(\text{hay } x = \frac{-b' - \sqrt{\Delta'}}{a}\right)$, $x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \left(\text{hay } x = \frac{-b' + \sqrt{\Delta'}}{a}\right)$

3. Định lý Vi-et

a) ĐỊNH LÝ THUẬN

Nếu phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_1 và x_2 thì chúng thoả mãn hệ thức Vie-et sau :

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \text{ và } x_1.x_2 = \frac{c}{a} \qquad (V)$$

b) ĐỊNH LÝ ĐẢO

Nếu có hai số x_1 và x_2 thoả mãn các hệ thức Vie-et (V) thì chúng là các nghiệm của phương trình $ax^2 + bx + c = 0$.

c) HỆ QUẢ

Nếu hai số có tổng là S và tích là P thì chúng là nghiệm của phương trình:

$$x^2 - Sx + P = 0.$$

d) Ứng dụng : Dấu các nghiệm số.

Cho phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c = 0$. Kí hiệu $S = -\frac{b}{a}$, $P = \frac{c}{a}$. Ta có :

- *Phương trình có hai nghiệm trái dấu* <=> $P < 0$

• *Phương trình có hai nghiệm dương* $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta \geq 0 \\ P > 0 \\ S > 0 \end{cases}$

• *Phương trình có hai nghiệm âm* $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta \geq 0 \\ P > 0 \\ S < 0 \end{cases}$.

Thí dụ 1

Giải phương trình $2x^2 - 2(a+1)x + a^2 - 2a + 5 = 0$ (1)

Lời giải

Ta có $\Delta' = (a+1)^2 - 2(a^2 - 2a + 5) = -a^2 + 6a - 9 = -(a-3)^2$

Với $a \neq 3$, $\Delta' < 0 \Rightarrow$ Phương trình (1) vô nghiệm.

Với $a = 3 \Leftrightarrow \Delta' = 0 \Rightarrow$ Phương trình (1) có nghiệm kép $x = -\frac{B'}{A} = \frac{a+1}{2} = \frac{3+1}{2} = 2$

Thí dụ 2

Tìm m để phương trình $\sqrt{m}(m-3)x^2 + 2(m-3)x + 2\sqrt{m} = 0$ (1)

1) có nghiệm xác định.

2) có nghiệm trái dấu.

Lời giải

1) Phương trình (1) *có nghiệm xác định* trong hai trường hợp sau đây :

Trường hợp 1 : $\begin{cases} A = 0 \\ B \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{m}(m-3) = 0 \\ m - 3 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = 0$ (2)

Trường hợp 2 : $\begin{cases} A \neq 0 \\ \Delta' \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{m}(m-3) \neq 0 \\ (m-3)^2 - 2m(m-3) > 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{m}(m-3) \neq 0 \\ (m-3)(m+3) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{m}(m-3) \neq 0 \\ m^2 - 3^2 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < m < 3$ (3)

Từ (2), (3) suy ra phương trình (1) có nghiệm khi và chỉ khi $0 \leq m < 3$

2) Phương trình (1) *có nghiệm trái dấu* trong hai trường hợp sau đây :

Trường hợp 1: A=B=C=0 $\Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = 3 \end{cases}$ (mâu thuẫn) (4)

Trường hợp 2 : AC<0 $\Leftrightarrow (\sqrt{m})^2(m-3) < 0 \Leftrightarrow 0 < m < 3$ (5)

Từ (4), (5) suy ra phương trình (1) *có nghiệm trái dấu* khi và chỉ khi $0 < m < 3$.

Thí dụ 3

Tìm m để phương trình sau có hai nghiệm lớn hơn 1 : $x^2 - x + m - 4 = 0$ (1)

Lời giải

Đặt $x = t + 1$, $x > 1 \Leftrightarrow t > 0$. Phương trình (1) trở thành $t^2 - t + m - 4 = 0$ (2)

Phương trình (1) có hai nghiệm lớn hơn 1 <=> Phương trình (2) có hai nghiệm dương. Điều đó có khi và chỉ khi :

$$\begin{cases} \Delta \geq 0 \\ P > 0 \\ S > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - 4(m-4) \geq 0 \\ m - 4 > 0 \\ 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 17 - 4m \geq 0 \\ m > 4 \end{cases} \Leftrightarrow 4 < m \leq \frac{17}{4}$$

> **Thí dụ 3**
>
> Tìm m để -2 xen kẽ giữa các nghiệm của phương trình
>
> $(m + 3)x^2 - 3(m - 1)x + 4m = 0$ (1)

Lời giải

Trường hợp 1: $m = -3$, ta có (1) $\Leftrightarrow 12x - 12 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \Rightarrow m = -3$ không phải là giá trị phải tìm. (2)

Trường hợp 2 : $m \neq -3$, đặt $x = t - 2$, Phương trình (1) trở thành

$$(m + 3)(t - 2)^2 - 3(m - 1)(t - 2) + 4m = 0$$

$$\Leftrightarrow (m + 3)t^2 - (7m - 9)t + 11m - 6 = 0. \quad (3)$$

Phương trình (1) có hai nghiệm $x_1 < -2 < x_2 \Leftrightarrow x_1 + 2 < 0 < x_2 + 2 \Leftrightarrow$ Phương trình (3) có hai nghiệm trái dấu $\Leftrightarrow (m + 3)(11m - 6) < 0 \Leftrightarrow -3 < m < \frac{6}{11}$ (4)

Từ (2), (4) suy ra phương trình (1) có -2 xen kẽ giữa các nghiệm của nó khi và chỉ khi $-3 < m < \frac{6}{11}$.

> **Thí dụ 4(*)**
>
> Cho phương trình $x^3 + (m - 1)x^2 - 3mx + 2m - 4 = 0$ (1)
>
> a) Chứng tỏ phương trình có một nghiệm không phụ thuộc m.
>
> b) Tìm m để tập nghiệm của phương trình (1) có đúng hai giá trị.
>
> ***(Bạn cần hiểu k nghiệm bằng nhau chỉ chỉ cho một giá trị)***

Lời giải

a) Viết lại (1) $\Leftrightarrow m(x^2 - 3x + 2) + x^3 - x^2 - 4 = 0$. (2)

• x_0 là nghiệm không phụ thuộc m của (1) $\Leftrightarrow m(x_0^2 - 3x_0 + 2) + x_0^3 - x_0^2 - 4 = 0$ đúng với mọi m. Điều đó có khi và chỉ khi

$$\begin{cases} x_0^2 - 3x_0 + 2 = 0 \\ x_0^3 - x_0^2 - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x_0 = 1 \\ x_0 = 2 \end{array}\right. \\ x_0^3 - x_0^2 - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x_0 = 2.$$

Vậy phương trình luôn có nghiệm $x = 2$ không phụ thuộc m.

b) Từ kết quả trên suy ra (2) $\Leftrightarrow (x-2)[x^2+(m+1)x-m+2]$.

Gọi $f(x)=x^2+(m+1)x-m+2$.

• Tập nghiệm của phương trình (1) có đúng hai giá trị khi và chỉ khi $f(x)=0$ có hai nghiệm x_1, thoả mãn một trong hai trường hợp sau đây :

Trường hợp 1 : $2=x_1\neq x_2 \Leftrightarrow \begin{cases} f(2)=0 \\ -\dfrac{b}{a}\neq 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m+8=0 \\ -m-1\neq 4 \end{cases} \Leftrightarrow m=-8$ (3)

Trường hợp 2 : $2\neq x_1=x_2 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta=0 \\ -\dfrac{b}{a}\neq 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2+6m-7=0 \\ -m-1\neq 4 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=1 \\ m=-7 \end{array}\right.$ (4)

Từ (3), (4) suy ra tập hợp các giá trị phải tìm của m là $\{m=-8;\ m=-7;\ m=1\}$

Thí dụ 5[1]

Khi $m\geq -2$, tìm nghiệm bé nhất (*có thể*) của phương trình

$3x^2-(m+23)x+2m+22=0$ (1)

LỜI GIẢI

Viết lại (1) $\Leftrightarrow f(x)=3x^2-23x+22-m(x-2)=0$

Ta có $f(2)=-12\neq 0 \Rightarrow$ Phương trình (1) không có nghiệm $x=2$.

Với $x\neq 2$, chia hai vế cho $x-2\neq 0$ ta có (1) $\Leftrightarrow m=\dfrac{3x^2-23x+22}{x-2}$

Bởi vậy $m\geq -2 \Leftrightarrow \dfrac{3x^2-23x+22}{x-2}\geq -2 \Leftrightarrow \dfrac{3x^2-23x+22}{x-2}+2\geq 0$

$\Leftrightarrow \dfrac{3x^2-21x+18}{x-2}\geq 0 \Leftrightarrow \dfrac{x^2-7x+6}{x-2}\geq 0 \Leftrightarrow Q(x):=\dfrac{(x-1)(x-6)}{x-2}\geq 0.$

Dấu của Q(x) :

− 1 + 2 − 6 + x

Căn cứ vào dấu của Q(x) suy ra $Q(x)\geq 0 \Leftrightarrow x\in[1;2)\cup[6;+\infty)$ (3)

Gọi x_0 là nghiệm của phương trình (1) khi $m\geq -2$. Từ (3) suy ra $\min(x_0)=1$. Nói khác đi, khi $m\geq -2$, nghiệm bé nhất (*có thể*) của phương trình (1) là $x=1$.

§2. HỆ THỨC LIÊN HỆ GIỮA CÁC NGHIỆM CỦA PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI AX²+BX+C=0

Bài toán 1

Cho phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) (1) phụ thuộc tham số m và $Q(x_1; x_2)=0$ (2) là một hệ thức giữa x_1, x_2 độc lập với m, trong đó x_1, x_2 là các nghiệm của (1).

Tìm m để (2) đúng.

(Tìm m để phương trình có nghiệm thoả mãn hệ thức cho trước)

CÁCH GIẢI

Cách 1 (cần và đủ)

• Điều kiện cần.

Từ $\begin{cases} Q(x_1, x_2) = 0 \\ S = h(m) \\ P = g(m) \end{cases}$ *khử $x_1; x_2$ cho phương trình* $f(m)=0$ *(2)*

Giải phương trình $f(m)=0$ với ẩn m. Giả sử tập nghiệm tìm được là (£).

• Điều kiện đủ. *Thay các giá trị của* $m \in$ (£) *vừa tìm được vào (1).*

Nếu $\exists (x_1; x_2)$ thoả (2), thì giá trị tương thích của m là một giá trị phải tìm.

Cách 2 : (Biến đổi tương đương)

Giá trị phải tìm của m là nghiệm của hệ $\begin{cases} \Delta > 0 \\ Q(x_1; x_2) = 0 \\ S = -\dfrac{b}{a} \\ P = \dfrac{c}{a} \end{cases}$.

Giải hệ này với biến m.

Chú ý : Khi xét dấu $\Delta = a'm^2 + b'm + c' > 0$, *có thể biến đổi* $\Delta > 0$

$\Leftrightarrow a'\left(m + \dfrac{b'}{2}\right)^2 > \dfrac{b'^2}{4}$ *để dẫn tới bất đẳng thức giá trị tuyệt đối.*

Thí dụ 1.

Tìm m để phương trình $x^2 + x + m + 1 = 0$ có hai nghiệm thoả mãn :

$$x_1x_2 + 3(x_1 + x_2) + 5 = 0 \quad (1)$$

Lời giải

Điều kiện cần : Giả sử phương trình có 2 nghiệm x_1, x_2 thoả mãn yêu cầu bài toán, ta có

$$\begin{cases} x_1x_2 + 3(x_1 + x_2) + 5 = 0 & (1) \\ x_1 + x_2 = -1 & (2) \\ x_1x_2 = m + 1 & (3) \end{cases}$$

Thế (2), (3) vào (1) có : $m + 1 + 3(-1) + 5 = 0 \Leftrightarrow m = -3$

Điều kiện đủ : Với $m = -3$, phương trình đã cho trở thành $x^2 + x - 2 = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -2 \end{array}\right.$$. Thay cặp giá trị $\{x = 1; x = -2\}$ vào (1) thấy đúng.

Vậy tập hợp các giá trị phải tìm của m là $m = -3$.

Thí dụ 2.

Tìm m để phương trình $x^2-2(m+2)x + 4m + 5 = 0$ (1) có hai nghiệm thoả mãn :

a) đều dương; b) $|x_1x_2|=2$

Lời giải

Ta có $\Delta' = (m+2)^2-(4m+5)=m^2-1$. Gọi $x_{1,2}$ là các nghiệm của phương trình (1).

Theo Vi-et $x_1+x_2=2(m+2)$, $x_1x_2=4m+5$

a) Phương trình có hai nghiệm đều dương

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' \geq 0 \\ P > 0 \\ S > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 1 \geq 0 \\ 4m + 5 > 0 \\ 2(m+2) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -\dfrac{5}{4} < m \leq -1 \\ m \geq 1 \end{array}\right.$$

b) Ta có $x_{1,2}=\dfrac{-b'\pm\sqrt{\Delta'}}{a} \Rightarrow |x_1-x_2|=\dfrac{2\sqrt{\Delta'}}{|a|}=2\sqrt{m^2-1}$.

Bởi thế, phương trình có hai nghiệm thoả $|x_1-x_2|=2 \Leftrightarrow 2\sqrt{m^2-1}=2$

$\Leftrightarrow m^2-1=1 \Leftrightarrow m^2=2 \Leftrightarrow m=\pm\sqrt{2}$

Thí dụ 3.

Tìm m để phương trình $3x^2 + 4(m-1)x + m^2 - 4m + 1 = 0$ (1)

có hai nghiệm x_1, x_2 thoả mãn $\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}=\dfrac{1}{2}(x_1+x_2)$ (2)

Lời giải

Gọi $\Delta'= 4(m-1)^2 - 3(m^2-4m+1) = m^2 + 4m + 1 = (m+2)^2 - 3$

Gọi $S = x_1 + x_2 = \dfrac{4(1-m)}{3}$, $P = x_1x_2 = \dfrac{m^2-4m+1}{3}$

Ta có (2) $\Leftrightarrow \dfrac{x_1+x_2}{x_1x_2}=\dfrac{x_1+x_2}{2} \Leftrightarrow \dfrac{S}{P}=\dfrac{S}{2} \Leftrightarrow S\left(\dfrac{1}{P}-\dfrac{1}{2}\right)=0$ (3)

Phương trình có hai nghiệm thoả mãn (3) khi và chỉ khi

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} S = 0 \\ P < 0 \end{cases} \\ \begin{cases} P = 2 \\ \Delta \geq 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 1 - m = 0 \\ m^2 - 4m + 1 < 0 \end{cases} \\ \begin{cases} m^2 - 4m + 1 = 2 \\ m^2 + 4m + 1 \geq 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 1 \\ \begin{cases} m^2 - 4m - 1 = 0 \\ 8m \geq -2 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 1 \\ m = 2 + \sqrt{5} \end{array}\right.$$

• Tập hợp các giá trị phải tìm của m là $\{m = 1; m = 2 + \sqrt{5}\}$

Thí dụ 4

Tìm m để phương trình $f(x) = x^2 - (m+2)x + m^2 + 1 = 0$ (1)
có hai nghiệm x_1, x_2 thoả mãn $x_1^2 + 2x_2^2 = 3x_1x_2$ (2)

Lời giải

Nhận thấy $f(0) = m^2 + 1 \geq 1, \forall m$ suy ra phương trình không có nghiệm $x = 0$.

Bởi vậy đặt $x_1 = x_2 t$, điều kiện (2) trở thành $x_2^2(t^2 - 3t + 2) = 0$

$$\overset{x_2 \neq 0}{\Leftrightarrow} \left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t = 2 \end{array}\right. \quad \text{Suy ra (2)} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = x_2 \\ x_1 = 2x_2 \end{array}\right.$$

a) Phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 thoả $x_1 = x_2 \Leftrightarrow \Delta = 0$

$\Leftrightarrow (m+2)^2 - 4(m^2+1) = 0 \Leftrightarrow m(4 - 3m) = 0 \Leftrightarrow \{m = 0; m = \frac{4}{3}\}$ (3)

b) $x_1 = 2x_2 \Leftrightarrow x_1 + x_2 = 3x_2$ (4)

Thay $x_1 + x_2 = m + 2$, điều kiện (4) trở thành $x_2 = \frac{m+2}{3}$

Vậy điều kiện cần để phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 thoả $x_1 = 2x_2$ là

$x_2 = \frac{m+2}{3} \Leftrightarrow f\left(\frac{m+2}{3}\right) = 0 \Leftrightarrow m^2 + 1 = 0 \Rightarrow m \in \varnothing$ (5)

Từ (3), (5) suy ra tập hợp các giá trị phải tìm của m là $\{m = 0; m = \frac{4}{3}\}$

Thí dụ 5

Chứng minh rằng: Cần và đủ để phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$ (1)
có hai nghiệm, đồng thời nghiệm này bằng k lần nghiệm kia là
$kb^2 = (k+1)^2ac, (k \neq -1)$ (2)

Lời giải

Để ý (2) $\Leftrightarrow ac = \frac{kb^2}{(k+1)^2}$ suy ra $\Delta = b^2 - 4ac = b^2 - 4\frac{kb^2}{(k+1)^2} = \left(\frac{(k-1)b}{k+1}\right)^2$

$\Rightarrow \Delta \geq 0$ (3)

Gọi x_1, x_2 là các nghiệm của phương trình (1). Ta có $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$; $x_1x_2 = \frac{c}{a}$

- Phương trình (1) có hai nghiệm, đồng thời nghiệm này bằng k lần nghiệm kia

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = kx_2 \\ x_2 = kx_1 \end{array}\right. \Leftrightarrow (x_1 - kx_2)(x_2 - kx_1) = 0$$

$\Leftrightarrow (1 + k^2)x_1x_2 - k(x_1^2 + x_2^2) = 0 \Leftrightarrow (k+1)^2x_1x_2 - k(x_1 + x_2)^2 = 0$

$\Leftrightarrow (k+1)^2\frac{c}{a} - k\frac{b^2}{a^2} = 0 \Leftrightarrow kb^2 = (k+1)^2ac$ (4)

Từ (3), (4) bài toán được chứng minh.

BÀI TẬP

Tìm m để phương trình $f(x)=0$ có hai nghiệm thoả mãn điều kiện (Ư)

1) $f(x)=mx^2-2(m-1)x+3(m-2)$ (Ư) : $x_1+2x_2=1$

2) $f(x)=x^2-3{,}75x+m^3$ (Ư) : $x_2=(x_1)^2$

3) $f(x)=x^2+(m-3)x-2m+1$ (Ư) : $\dfrac{x_1}{2x_2}+\dfrac{x_2}{2x_1}=-3$

4) $f(x)=x^2-mx+m^2-m-3$ (Ư) : có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2 thoả mãn là độ dài của 2 cạnh AB, AC của ΔABC vuông tại A có cạnh huyền BC = 2

5) $f(x)=x^2-2(m-2)x+(m^2+2m-3)$ (Ư) : $\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}=\dfrac{x_1+x_2}{5}$

6) $f(x)=\left(m+\dfrac{3}{2}\right)x^2-2mx+2$ $(Ư_1)$: $x_1^2+x_2^2+x_1+x_2=5$;

$(Ư_2)$: $\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}=\dfrac{5}{2}$ (hai câu $(Ư_1)$ và $(Ư_2)$ độc lập).

Bài toán 2

Cho phương trình $ax^2+bx+c=0$ $(a\neq 0)$ (1) phụ thuộc tham số m và $Q(x_1; x_2)=0$ (2) là một hệ thức giữa x_1, x_2 độc lập với m, trong đó x_1, x_2 là các nghiệm của (1)

Biết rằng $Q(x_1; x_2)$ đúng với mọi m. *[chưa biết cụ thể $Q(x_1; x_2)$].*

Tìm lại $Q(x_1; x_2)$

(Tìm hệ thức liên hệ giữa các nghiệm độc lập với tham số)

CÁCH GIẢI

Từ $\begin{cases} S=h(m) \\ P=g(m) \end{cases}$ khử m, thu được một hệ thức : $Q(S; P)=0 <=> Q(x_1; x_2)=0$

Đó là hệ thức cần tìm.

Thí dụ 6.

Tìm hệ thức độc lập với m liên hệ giữa các nghiệm của mỗi phương trình sau :

a) $x^2-mx+2m-3=0$ (1)

b) $(m+2)x^2-(m+4)x+2-m=0.$ (2)

Lời giải

Gọi x_1, x_2 là các nghiệm của phương trình $S=x_1+x_2$, $P=x_1.x_2$

a) Áp dụng Vi-et vào phương trình (1) ta có $\begin{cases} S=m \\ P=2m-3 \end{cases} => P=2S-3$

hay $x_1.x_2 - 2(x_1 + x_2) + 3 = 0$.

Đây là hệ thức liên hệ giữa các nghiệm độc lập với tham số mà ta phải tìm.

b) • *Hệ thức độc lập.*

Gọi x_1, x_2 là các nghiệm của phương trình, $S=x_1+x_2$, $P=x_1.x_2$

Theo Vi-et ta có $\begin{cases} S = \dfrac{m+4}{m+2} = 1 + \dfrac{2}{m+2} \\ P = \dfrac{2-m}{m+2} = -1 + \dfrac{4}{m+2} \end{cases}$

$\Rightarrow 2S - P = 3 \Leftrightarrow 2(x_1+x_2) - x_1x_2 - 3 = 0$ (3)

Đó là hệ thức liên hệ giữa các nghiệm độc lập với tham số mà ta phải tìm.

• *Tìm lại nghiệm kép*

Khi $x_1 = x_2 = t$, hệ thức (3) trở thành $4t - t^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow \{t=1; t=3\}$

Vậy phương trình có nghiệm kép hoặc là x=1 (*ứng với m=0*), hoặc là x=3 (*ứng với* $m = -\dfrac{8}{5}$).

Thí dụ 7.

Cho phương trình $x^3 - (2m + 3)x^2 + 2mx + 2 = 0$ (1)

a) Chứng tỏ phương trình có một nghiệm không phụ thuộc m.

b) Tìm m để phương trình có 3 nghiệm phân biệt.

c) Tìm hệ thức độc lập với m, liên hệ giữa hai nghiệm (khác với nghiệm nói ở câu a)

Lời giải

a) Viết lại phương trình (1) $\Leftrightarrow 2mx(x-1) - x^3 + 3x^2 - 2 = 0$ (2)

Ta có x_0 là nghiệm cố định của phương trình (1)

$\Leftrightarrow 2mx_0(x_0 - 1) - x_0^3 + 3x_0^2 - 2 = 0$ đúng với mọi m $\Leftrightarrow \begin{cases} x_0(x_0 - 1) = 0 \\ -x_0^3 + 3x_0^2 - 2 = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow x_0 = 1$. Vậy với mọi giá trị của m, phương trình luôn có duy nhất một nghiệm cố định là x=1.

b) Viết lại (2) $\Leftrightarrow 2mx(x-1) - (x-1)(x^2 - 2x - 2) = 0$

$\Leftrightarrow (x-1)[x^2 - 2(m+1)x - 2] = 0$

Gọi $h(x) = x^2 - 2(m+1)x - 2$. Phương trình (1) có 3 nghiệm phân biệt khi và chỉ khi h(x) = 0 có 2 nghiệm phân biệt khác 1. (3)

Do $ac = -2 < 0$, nên mệnh đề (3) xảy ra khi và chỉ khi $h(1) \neq 0 \Leftrightarrow 1 - 2(m+1) - 2 \neq 0$

$\Leftrightarrow -2m - 3 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq -\dfrac{3}{2}$. Vậy phương trình (1) có ba nghiệm phân biệt khi và chỉ khi $m \neq -\dfrac{3}{2}$.

c) Theo bài ra, ta tìm hệ thức liên hệ giữa các nghiệm của h(x) = 0 độc lập với tham số.

Thấy rằng $x_1.x_2 = -2$. Đó là hệ thức mà ta phải tìm.

Thí dụ 8.

Cho phương trình $(m-1)x^2+(2m-1)x+m+5$ (1)

1) Tìm tất cả các giá trị của m để phương trình có 2 nghiệm thực x_1 và x_2.

2) Giả sử rằng a là số thực bất kỳ khác 1.

Tìm a sao cho tích $U=(x_1-a)(x_2-a)$ (2) không phụ thuộc m.

Lời giải

1) Bạn đọc tự giải.

2) *Cách 1*: Viết lại (2) $\Leftrightarrow U=x_1x_2-a(x_1+x_2)+a^2$ (3)

Theo Vi-et $x_1x_2=\dfrac{m+5}{m-1}$; $x_1+x_2=-\dfrac{2m-1}{m-1}$

Thay vào (3) có $U=\dfrac{m+5}{m-1}+a\dfrac{2m-1}{m-1}+a^2=a^2+2a+1+\dfrac{6+a}{m-1}$.

Bởi vậy U không phụ thuộc m khi và chỉ khi $6+a=0$ hay $a=-6$

Vậy $a=-6$ là giá trị duy nhất thoả mãn yêu cầu bài toán.

Cách 2 :

• Theo Vi-et $P=x_1x_2=\dfrac{m+5}{m-1}=1+\dfrac{6}{m-1}$, $S=x_1+x_2=-\dfrac{2m-1}{m-1}=-2-\dfrac{1}{m-1}$

Suy ra $P+6S+11=0$ hay $x_1x_2+6(x_1+x_2)+11=0$ (4)

Ta có (4) là hệ thức liên hệ giữa các nghiệm độc lập với tham số.

• Viết lại (2) $\Leftrightarrow x_1x_2-a(x_1+x_2)+a^2-U=0$ (5)

Theo bài ra (5) là hệ thức liên hệ giữa các nghiệm độc lập với tham số. Ta biết rằng mỗi phương trình có duy nhất một hệ thức liên hệ giữa các nghiệm độc lập với tham số. Bởi vậy so sánh (4) và (5) ta có $\begin{cases}a=-6\\a^2-U=11\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=-6\\U=25\end{cases}$

• Vậy $a=-6$ là giá trị duy nhất thoả mãn yêu cầu bài toán.

Thí dụ 9.

1) Cho phương trình $(m-5)t^2-2mt+m+4=0$. (1)

Gọi S và P là tổng và tích các nghiệm. Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, gọi $M=(x;y)$ là điểm có toạ độ $x=S$; $y=P$. Chứng minh khi m thay đổi, các điểm M biến thiên trên một đường thẳng cố định mà ta phải tìm.

2) Tính $T=\left(1-\sqrt{5}\right)^5+\left(1+\sqrt{5}\right)^5$

Lời giải

1) Ta có : $\Delta'=m^2-(m-5)(m+4)=m+20$. Điều kiện để phương trình có hai nghiệm là $\begin{cases}m-5\neq 0\\\Delta\geq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m\neq 5\\m\geq -20\end{cases}\Leftrightarrow -20\leq m\neq 5$. Gọi $S=x_1+x_2$, $P=x_1x_2$

Theo Vi-et : $S=\dfrac{2m}{m-5}=2+\dfrac{10}{m-5}$; $P=\dfrac{m+4}{m-5}=1+\dfrac{9}{m-5}$.

Suy ra $9S-10P=8$ hay $9x-10y-8=0 \Rightarrow$ Tập hợp các điểm M(S; P) thuộc đường thẳng $9x-10y-8=0$

2) Trước hết chứng minh hệ thức $\forall n > 2$ luôn có : $aS_{n+2} + bS_{n+1} + cS_n = 0$ (*)

trong đó $S_n = x_1^n + x_2^n$; x_1, x_2 là nghiệm của $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$, $n > 2$.

Thật vậy : Theo giả thiết ta có

$$\begin{cases} ax_1^2 + bx_1 + c = 0 \\ ax_2^2 + bx_2 + c = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1^n(ax_1^2 + bx_1 + c) = 0 \\ x_2^n(ax_2^2 + bx_2 + c) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ax_1^{n+2} + bx_1^{n+1} + cx_1^n = 0 \\ ax_2^{n+2} + bx_2^{n+1} + cx_2^n = 0 \end{cases}$$

Cộng theo từng vế các đẳng thức ta có điều phải chứng minh.

• Đặt $x_1 = 1 - \sqrt{5}$, $x_2 = 1 + \sqrt{5}$ => x_1, x_2 là nghiệm của phương trình

$x^2 - 2x - 4 = 0$ => $T = S_5 = x_1^5 + x_2^5$

Theo Vi-et $P = x_1.x_2 = -4$; $S_1 = x_1 + x_2 = 2$, $S_2 = x_1^2 + x_2^2 = S_1^2 - 2P = 4 + 8 = 12$

Theo (*) : $S_{n+2} - 2S_{n+1} - 4S_n = 0 \Leftrightarrow S_{n+2} = 2(S_{n+1} + 2S_n)$

Với n = 1 : $S_3 = 2(S_2 + 2S_1) = 2(12 + 4) = 32$

Với n = 2 : $S_4 = 2(S_3 + 2S_2) = 2(32 + 24) = 112$

Với n = 3 : $S_5 = 2(S_4 + 2S_3) = 2(112 + 64) = 352$

Vậy T = 352

BÀI TẬP

Bài 1.

Tìm hệ thức độc lập với tham số liên hệ giữa các nghiệm của phương trình :

1) $x^2 - mx + 3m - 8 = 0$ 2) $mx^2 - (2m + 3)x - m - 4 = 0$

3) $x^2 + (m + 10)x + m^2 + 25 = 0$ 4) $(m - 1)x^2 - 2mx + m + 4 = 0$.

5) $(m - 1)x^2 - (2m - 2)x + m + 1 = 0$ 6) $(m + 1)x^2 + 2(m - 3)x + m + 1 = 0$

Bài 2.

Cho phương trình $m^2x^3 + mx^2 - (4m^2 - 3m - 3)x + 2(m + 3) = 0$

1) Chứng tỏ phương trình có một nghiệm cố định với mọi m.

2) Tìm m để phương trình có không quá một nghiệm dương.

3) Tìm hệ thức độc lập với m liên hệ giữa các nghiệm của phương trình khác với nghiệm nói ở câu 1.

Bài 3.

Cho phương trình $(m - 4)x^2 - 2(m - 2)x + m - 1 = 0$

1) Chứng tỏ phương trình có nghiệm với mọi $m \geq 0$

2) Gọi $U = (x_1 + a)(x_2 + a)$.

Tìm giá trị của U, biết rằng U có giá trị không đổi, $\forall m \neq 4$.

3) Tính $T = \left(1 - \sqrt{7}\right)^5 + \left(1 + \sqrt{7}\right)^5$

§3 ỨNG DỤNG CỦA BIỆT THỨC Δ

Tìm miền giá trị của biểu thức - Tìm $\max_D f(x;y)$ - Tìm $\min_D f(x;y)$

Tách bộ phận kép - Chứng minh bất đẳng thức.

Thí dụ 1.
Tìm giá trị nhỏ nhất (GTNN), giá trị (GTLN) lớn nhất của biểu thức

$$Q=\frac{x^2+4\sqrt{2}x+3}{x^2+1} \qquad (1)$$

Lời giải

Cách 1. Gọi a là một giá trị của Q, tức là $a=\dfrac{x^2+4\sqrt{2}x+3}{x^2+1}$

$\Leftrightarrow a(x^2+1)=x^2+4\sqrt{2}x+3 \Leftrightarrow (a-1)x^2-4\sqrt{2}x+a-3=0$ (3)

Trường hợp 1: a=1, ta có (3) $\Leftrightarrow x=-\dfrac{\sqrt{2}}{4} \Rightarrow$ a=1 là một giá trị của Q. (4)

Trường hợp 2: $a\neq 1$, tập giá trị của a là nghiệm của $\Delta \geq 0 \Leftrightarrow -a^2+4a+5\geq 0$

$\Leftrightarrow 9-(a-2)^2\geq 0 \Leftrightarrow |a-2|\leq 3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}-1\leq a<1\\ 1<a\leq 5\end{array}\right.$ (5)

• Từ (4), (5) suy ra: Tập giá trị của a là $a\in[-1;5] \Rightarrow$ GTNN(Q)=-1; GTLN(Q)=5

Cách 2.

Phương pháp tách bộ phận kép bằng hệ số bất định

Tư tưởng cách giải

Số thực a giá trị nhỏ nhất (hoặc giá trị lớn nhất) của biểu thức Q trên miền xác định ($\mathcal{D}$) $\Leftrightarrow Q-a\leq 0$ (hoặc $Q-a\geq 0$) với mọi giá trị của biến số thuộc ($\mathcal{D}$). Từ đó ta đi tìm số thực a sao cho hiệu Q − a là một biểu thức $f(x)\geq 0$ (hoặc $f(x)\leq 0$) dấu đẳng thức có $x=x_0\in(\mathcal{D})$

- Tập xác định : R
- Với $\forall a\in R$ luôn có : $Q-a=\dfrac{x^2+4\sqrt{2}x+3-a(x^2+1)}{x^2+1}=\dfrac{f(x)}{x^2+1}$ (6)

  với $f(x)=x^2+4\sqrt{2}x+3-a(x^2+1)=(1-a)x^2+4\sqrt{2}x+3-a$

  Gọi $\Delta_f'=8-(1-a)(3-a)=-a^2+4a+5$.
- (6) đúng $\forall a\in R \Rightarrow$ (6) đúng với những giá trị của a làm $\Delta_f'=0$

  $\Leftrightarrow -a^2+4a+5=0 \Leftrightarrow \{a=-1;\ a=5\}$

  Với $a=-1$, $Q+1=\dfrac{2(x+\sqrt{2})^2}{x^2+1}\geq 0$, dấu đẳng thức có khi $x=-\sqrt{2}$

$\Rightarrow \min_R Q=-1$

Với a = 5, $Q-5=-\dfrac{2(\sqrt{2}.x-1)^2}{x^2+1}\leq 0$, dấu đẳng thức có khi $x=\dfrac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \max_R Q=5$

Lời bình

Thay vì phải giải các bất phương trình $Q(x) > a$ (hoặc $Q(x) < a$) để tìm cực trị của biểu thức, phương pháp "tách bỏ phần kép" đưa về giải phương trình $A(a)= 0$. Có thể nói phương pháp *"tách bỏ phần kép"* là chiếc *cầu nối* giữa *bất phương trình và phương trình.*

Thí dụ 2.
Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số

$$y = \frac{3x^4 + mx^2 + 3}{x^4 + 2x^2 + 1} \quad (m \neq 6) \qquad (1)$$

Lời giải

Tập xác định R.
Cách 1.

- Với $x = 0$ có $y = 3 \quad \forall m \in R$ (2)
- Với $x \neq 0$, chia cả tử thức và mẫu thức cho x^2, ta có

$$(1) \Leftrightarrow y = \frac{3\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + m}{x^2 + \frac{1}{x^2} + 2}.\ \text{Đặt } t = x^2 + \frac{1}{x^2},\ t \geq 2$$

Hàm số (1) trở thành $y = \dfrac{3t + m}{t + 2}$ (3)

Do $t \geq 2 \Leftrightarrow t + 2 \geq 4$ nên (3) $\Leftrightarrow y(t + 2) = 3t + m \Leftrightarrow (y-3)t = m - 2y$ (4)

Theo giả thiết $m \neq 6$, suy ra trong (4) phải có $y \neq 3$. (5)

Bởi vậy $(4) \Leftrightarrow \dfrac{m - 2y}{y - 3} = t \geq 2 \Rightarrow \dfrac{m - 2y - 2(y - 3)}{y - 3} \geq 0 \Leftrightarrow \dfrac{6 + m - 4y}{y - 3} \geq 0$

$$\overset{y \neq 3}{\Leftrightarrow} (y - 3)(6 + m - 4y) \geq 0 \overset{y \neq 3}{\Leftrightarrow} \left[\begin{array}{l} 3 < y \leq \dfrac{m + 6}{4}, \text{ nếu } m > 6 \\ \dfrac{m + 6}{4} \leq y < 3, \text{ nếu } m < 6 \end{array}\right.$$

Dấu đẳng thức : $t = 2 \Leftrightarrow x^2 + \dfrac{1}{x^2} = 2 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1$ (6)

Từ (3) và (6) suy ra :

- Nếu $m > 6$ thì $\min\limits_R y = y(0) = 3$, $\max\limits_R y = y(\pm 1) = \dfrac{6 + m}{4}$
- Nếu $m < 6$ thì $\max\limits_R y = y(0) = 3$, $\min\limits_R y = y(\pm 1) = \dfrac{6 + m}{4}$

Cách 2. Với $\forall x \in R$ có : $y + a = \dfrac{(3 + a)x^4 + (m + 2a)x^2 + (3 + a)}{(x^2 + 1)^2}$

+ Với $a = -3$ có : $y - 3 = \dfrac{(m - 6)x^2}{(x^2 + 1)^2} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} m > 6 \Rightarrow \min\limits_R y = y(0) = 3 \\ m < 6 \Rightarrow \max\limits_R y = y(0) = 3 \end{array}\right.$ (7)

+ Với $a \neq -3$, xét $\Delta = (m + 2a)^2 - 4(m+3)^2 = (m-6)(4a+m+6)$.

Với $m \neq 6$: $\Delta = 0 \Leftrightarrow a = -\dfrac{m+6}{4}$

Với $a = -\dfrac{m+6}{4}$ có $a + 3 = \dfrac{6-m}{4}$, $m + 2a = \dfrac{2(m-6)}{4}$ và

$$y - \frac{m+6}{4} = \frac{(6-m)x^4 - 2(6-m)x^2 + (6-m)}{4(x^2+1)^2} = \frac{(6-m)(x^2-1)^2}{4(x^2+1)^2}$$

Suy ra $\begin{cases} y - \dfrac{m+6}{4} \le 0, \text{ nếu } 6-m<0 \\ y - \dfrac{m+6}{4} \ge 0, \text{ nếu } 6-m>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \le y(\pm 1) = \dfrac{m+6}{4}, \text{ nếu } m<6 \\ y \ge y(\pm 1) = \dfrac{m+6}{4}, \text{ nếu } m>6 \end{cases}$ (8)

Kết hợp (7) và (8) có $\begin{cases} 3 \le y \le \dfrac{m+6}{4}, \text{ nếu } m>6 \\ \dfrac{m+6}{4} \le y \le 3, \text{ nếu } m<6 \end{cases}$ Suy ra :

• Nếu $m > 6$ thì $\min\limits_R y = 3$, $\max\limits_R y = \dfrac{6+m}{4}$

• Nếu $m < 6$ thì $\max\limits_R y = 3$, $\min\limits_R y = \dfrac{6+m}{4}$

Cách 3. Đặt $x^2 = t \ge 0$, hàm số trở thành $y = \dfrac{3t^2 + mt + 3}{t^2 + 2t + 1}$

$\Leftrightarrow (y-3)t^2 + (2y-m)t + (y-3) = 0$ (9)

• $y = 3$ Ta có (8) $\Leftrightarrow \{ t=0, \forall m \} \Leftrightarrow \{ x=0, \forall m \}$.

Tóm lại $y(0) = 3, \forall m$ (10)

• $y \neq 3$. Để ý $P = 1 > 0$ nên phương trình (9) có nghiệm $t \ge 0 \Leftrightarrow \{\Delta \ge 0; S \ge 0\}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} (2y-m)^2 - 4(y-3)^2 \ge 0 \\ \dfrac{m-2y}{y-3} \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (m-6)(m+6-4y) \ge 0 \\ (y-3)(m-2y) \ge 0 \end{cases}$ (11)

Chú ý: $\Delta = 0 \Leftrightarrow y = \dfrac{m+6}{4}$, khi đó $t = \dfrac{m-2y}{2y-6} = \dfrac{m-6}{m-6} = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1$ (12)

• $m > 6$: Ta có (11) $\Leftrightarrow \begin{cases} y \le \dfrac{m+6}{4} \\ y > 3 \end{cases} \Leftrightarrow 3 < y \le \dfrac{m+6}{4}$.

Kết hợp với (10), (12) $\Rightarrow \begin{cases} \min\limits_R y = y(0) = 3 \\ \max\limits_R y = y(\pm 1) = \dfrac{m+6}{4} \end{cases}$

• $m<6$: Ta có (11) $\Leftrightarrow \begin{cases} y \geq \dfrac{m+6}{4} \\ y \leq 3 \end{cases} \Leftrightarrow \dfrac{m+6}{4} \leq y \leq 3$

Kết hợp với (10), (12) $\Rightarrow \begin{cases} \min\limits_R y = y(\pm 1) = \dfrac{m+6}{4} \\ \max\limits_R y = y(0) = 3 \end{cases}$

Thí dụ 3.

Tìm giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của biểu thức $Q = \dfrac{x + 2y + 1}{x^2 + y^2 + 7}$ (1)

Lời giải

Cách 1 • Tập xác định : $\forall x \in R, \forall y \in R$.

• $\forall a \in R$ luôn có :

$$Q + a = \frac{a(x^2 + y^2 + 7) + x + 2y + 1}{x^2 + y^2 + 7} = \frac{ay^2 + 2y + ax^2 + x + 7a + 1}{x^2 + y^2 + 7}$$

Gọi $f(x, y) = ay^2 + 2y + ax^2 + x + 7a + 1$,

$\Delta_y' = 1 - a(ax^2 + x + 7a + 1) = -a^2x^2 - ax - 7a^2 - a + 1$

Gọi $\delta_x = a^2[1 + 4(1 - a - 7a^2)] = a^2(5 - 4a - 28a^2)$.

$$\delta_x = 0 \Leftrightarrow 5 - 4a - 28a^2 = 0 \Leftrightarrow \{a = -\frac{1}{2} \text{ và } a = \frac{5}{14}\}$$

• Với $a = -\dfrac{1}{2}$; $f(x, y) = -\dfrac{1}{2}y^2 + 2y - \dfrac{1}{2}x^2 + x - \dfrac{7}{2} + 1 = -\dfrac{1}{2}[(x-1)^2 + (y-2)^2] \leq 0$

$\Rightarrow Q - \dfrac{1}{2} = \dfrac{f(x,y)}{2(x^2 + y^2 + 7)} \leq 0 \Rightarrow Q \leq \dfrac{1}{2}$, dấu đẳng thức có $\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}$ (1)

• Với $a = \dfrac{5}{14}$; $f(x) = \dfrac{5}{14}y^2 + 2y + \dfrac{5}{14}x^2 + x + \dfrac{35}{14} + 1 = \dfrac{5}{14}\left[\left(x + \dfrac{7}{5}\right)^2 + \left(y + \dfrac{14}{5}\right)^2\right] \geq 0$

$\Rightarrow Q + \dfrac{5}{14} = \dfrac{f(x,y)}{2(x^2 + y^2 + 7)} \geq 0 \Rightarrow Q \geq -\dfrac{5}{14}$, **dấu đẳng thức có khi và chỉ khi**

$\left(x = -\dfrac{7}{5}; y = -\dfrac{14}{5}\right)$ **(2)**

Từ (1) và (2) kết luận : $\max\limits_R Q = \dfrac{1}{2}$, $\min\limits_R Q = -\dfrac{5}{14}$.

Chú ý

1) Các thí dụ xét ở trên đều có tập xác định là R. Bạn cần lưu ý khi biểu thức có tập xác định không lấp đầy trục số.

2) Việc tìm giá trị của a không bắt buộc trình bày trong bài làm.

Cách 2 Viết lại (1) $\Leftrightarrow Qx^2 - x + Qy^2 - 2y + 7Q - 1 = 0$ (3)

1) $Q = 0 \Leftrightarrow x + 2y + 1 = 0$ (4)

2) $Q \neq 0$. Xem Q là phương trình bậc hai đối với x.

Ta có $\Delta_x = -4Q^2y^2 + 8Qy - 28Q^2 + 4Q + 1$.

Gọi $f(y) = -4Q^2y^2 + 8Qy - 28Q^2 + 4Q + 1$, $\Delta_y = 4Q^2(-28Q^2 + 4Q + 5)$.

Tập giá trị của Q là nghiệm của $\Delta_x \geq 0 \Leftrightarrow f(y) \geq 0$. Điều đó có khi và chỉ khi

$$\Delta_y \geq 0 \Leftrightarrow -28Q^2 + 4Q + 5 \geq 0 \Leftrightarrow Q \in \left[-\frac{5}{14};\ \frac{1}{2}\right] \backslash \{0\}. \qquad (5)$$

Từ (4), (5) $\Rightarrow \{\min_R Q = -\dfrac{14}{5};\ \max_R Q = \dfrac{1}{2}\}$

Thí dụ 4.

Tìm a, b để biểu thức $Q = \dfrac{ax + b}{x^2 + 1}$ đạt giá trị lớn nhất bằng 4 và giá trị nhỏ nhất bằng -1

Lời giải

- Tập xác định : R
- Các số thực a, b thoả mãn yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow \begin{cases} \max_R(Q - 4) = 0 \\ \min_R(Q + 1) = 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \max_R(-4x^2 + ax + b - 4) = 0 \\ \min_R(x^2 + bx + b + 1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \max_R\left[-\left(2x - \dfrac{a}{8}\right)^2 + \dfrac{\Delta_1}{16}\right] = 0 \\ \min_R\left[\left(x + \dfrac{a}{2}\right)^2 - \dfrac{\Delta_2}{4}\right] = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta_1 = a^2 + 16(b - 4) = 0 \\ \Delta_2 = a^2 - 4(b + 1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 = 16 \\ b = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} (a = 4;\ b = 3) \\ (a = -4;\ b = 3) \end{array}\right.$$

$\Rightarrow$ **Có hai cặp giá trị của a và b phải tìm là** $\left[\begin{array}{l} (a = -4; b = 3) \\ (a = 4; b = 3) \end{array}\right.$

Bài toán 1

Chứng minh $Q := ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey + f \geq 0; \forall x \in R, \forall y \in R$ (*)

CÁCH GIẢI

Tách bộ phận kép bởi công thức $ax^2 + bx + c = a\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 - \dfrac{\Delta}{4a}$ (I)

Biểu thức (*) sẽ trở thành tổng các biểu thức cùng dấu.

Thí dụ 5

Chứng minh $\forall x \in R, \forall y \in R$ luôn có $Q \geq 0$ với :

a) $Q = x^2 + 2xy + 3y^2 + 2x + 6y + 3$

b) $Q = 4x^2 + 13y^2 - 12xy - 4y + 1$

Lời giải

a) Viết lại $Q = x^2 + 2(y + 1)x + (3y^2 + 6y + 3)$. Xem Q đa thức đối với ẩn **x**.

Ta có $\Delta'_x = (y + 1)^2 - (3y^2 + 6y + 3) = -2(y + 1)^2$

Áp dụng (I) sẽ có $Q = (x + y + 1)^2 + 2(y + 1)^2 \geq 0 \Rightarrow Q \geq 0, \forall x \in R, \forall y \in R$ (đpcm)

Dấu đẳng thức có khi và chỉ khi $\begin{cases} x + y + 1 = 0 \\ y + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = -1 \end{cases}$

b) Viết lại $Q = 4x^2 - 12y.x + 13y^2 - 4y + 1$ Xem Q đa thức đối với ẩn x.

Ta có $\Delta'_x = 36y^2 - 4(13y^2 - 4y + 2) = 4[9y^2 - (13y^2 - 4y + 1)] = -4(2y - 1)^2$

Áp dụng (I) sẽ có $Q = (2x - 3y)^2 + (2y - 1)^2 \Rightarrow Q \geq 0, \forall x \in R, \forall y \in R$ **(đpcm)**.

Dấu đẳng thức có khi và chỉ khi $\begin{cases} 2x - 3y = 0 \\ 2y - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{3}{4} \\ y = \dfrac{1}{2} \end{cases}$

Lời bình

Cấu trúc của biểu thức Q là $\mathbf{Q := M^2(ax+by+c)^2 + N^2(a'x+b'y+c')^2 + K^2 \geq 0}$

*Đó là **cội nguồn** giải thích tại sao ta tách (và luôn tách thành công) **biểu thức Q** thành bình phương đủ*

Trong (1 − a): $M^2 = 1;\ N^2 = 2;\ K^2 = 0;\quad a = b = c = 1;\quad a' = 0;\ b' = 2;\ c' = 1$

Trong (1 − b) $M^2 = N^2 = 1;\quad K^2 = 0;\quad a = 2;\ b = -3;\ c = 0;\ a' = 0;\ b' = 2;\ c' = 1$

Thí dụ 6.

Tìm m để $Q = x^2 + 4y^2 + my + 3 > 0, \forall x \in R, \forall y \in R$.

Lời giải

• Xem Q là tam thức bậc hai đối với x, $\Delta' = -(4y^2 + my + 3)$

Ta thấy $Q > 0, \forall x \in R, \forall y \in \mathbf{R} \Leftrightarrow \Delta' < 0, \forall y \in R \Leftrightarrow 4y^2 + my + 3 > 0, \forall y \in \mathbf{R}$.

Gọi $f(y) = 4y^2 + my + 3$, $\delta = m^2 - 16.3$. Theo (I) : $f(y) = 4\left(y + \dfrac{m}{8}\right)^2 - \dfrac{\delta}{16}$.

• $f(y) > 0, \forall y \in \mathbf{R} \Leftrightarrow \delta < 0 \Leftrightarrow m^2 - 3.16 < 0 \Leftrightarrow m^2 < 16.3 \Leftrightarrow -4\sqrt{3} < m < 4\sqrt{3}$

Đó là tập hợp các giá trị của m mà ta phải tìm .

Thí dụ 7

Tìm m để $Q = 9x^2 + 20y^2 + 4z^2 - 12xy + 6xz + myz \geq 0, \forall x \in R, \forall y \in R, \forall z \in \mathbf{R}$.

Lời giải

• Viết lại $Q = 9x^2 - 6(2y - z)x + 20y^2 + 4z^2 + myz$. Xem Q đa thức đối với ẩn x.

Ta có $\Delta'_x = 9[(2y - z)^2 - (20y^2 + 4z^2 + myz)] = 9U$,

Với $U = (2y - z)^2 - (20y^2 + 4z^2 + myz) = -16y^2 - (m + 4)zy - 3z^2$;

Gọi $\Delta_y = (m + 4)^2z^2 - 4.16.3z^2 = [(m + 4)^2 - 2^6 3]z^2$

Áp dụng (I) sẽ có $Q = 9[x - \frac{1}{3}(2y - z)]^2 - \frac{\Delta'_x}{9}$

• Suy ra $Q \geq 0, \forall x \in R, \forall y \in R, \forall z \in R \Leftrightarrow \Delta'_x \leq 0, \forall y \in R, \forall z \in R$

$\Leftrightarrow U \leq 0, \forall y \in R, \forall z \in R$ (1)

• Lại có $U = -16\left[y + \frac{(m + 4)z}{32}\right]^2 + \frac{\Delta_y}{64}$

Suy ra (1) $\Leftrightarrow \Delta_y = [(m + 4)^2 - 2^6 3]z^2 \leq 0, \forall z \in R \Leftrightarrow (m + 4)^2 - 2^6 3 \leq 0$

$\Leftrightarrow |m + 4| \leq 8\sqrt{3} \Leftrightarrow -4 - 8\sqrt{3} \leq m \leq -4 + 8\sqrt{3}$.

Thí dụ 8

Tìm giá trị nhỏ nhất của $Q = (x - 2y + 1)^2 + (2x + ay + 5)^2$ (1)
trong đó a là một số thực cho trước.

Lời giải

Đặt $x - 2y + \frac{5}{2} = t \in R \Rightarrow x - 2y + 1 = t - \frac{3}{2}$; $2x + ay + 5 = 2t + (a + 4)y$. Biểu thức Q trở thành $Q = \left(t - \frac{3}{2}\right)^2 + [2t + (a + 4)y]^2 = 5t^2 + [4(a + 4)y - 3]t + (a + 4)^2y^2 + \frac{9}{4}$

$\Leftrightarrow Q = 5\left(t + \frac{4(a + 4)y - 3}{10}\right)^2 - \frac{\Delta}{20} = 5\left(t + \frac{4(a + 4)y - 3}{10}\right)^2 + \frac{[(a + 4)y + 3]^2}{5}$

Suy ra :

⊕ $a = -4$, $Q = 5\left(t + \frac{6}{5}\right)^2 + \frac{9}{5} \geq \frac{9}{5}$, dấu đẳng thức có khi $t = \frac{3}{10} \Leftrightarrow x - 2y + \frac{11}{5} = 0$

(5)

⊕ $a \neq -4$, $Q \geq 0$ dấu đẳng thức có khi

$$\begin{cases} y = \dfrac{-3}{a + 4} \\ t = \dfrac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{-3}{a + 4} \\ x - 2y + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{-3}{a + 4} \\ x = \dfrac{-a - 10}{a + 4} \end{cases} \quad (6)$$

Từ (5) và (6) kết luận : $\min_R Q = \frac{9}{5}$, nếu $a \neq -4$; $\min_R Q = 0$, nếu $a = -4$.

Bài toán 2.

Cho x và y liên hệ với nhau bởi hệ thức **$Q := ax^2+by^2+cxy+dx+ey+f = 0$.** **(I)**

Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của **$U = Ax + By + C$** **(II)**

CÁCH GIẢI

Cách 1 : Nếu B≠0, Ta có (II) <=> $y = -\frac{A}{B}x + \frac{-C+U}{B}$

Thế vào (1) có phương trình bậc hai h(x)=0 *đối với x. Xem U là tham số*

Cực trị của U tìm được trong điều kiện có nghiệm của PT h(x)=0.

Cách 2 : Nếu có thể, ta biểu diễn $Q = m^2U^2+nU+k+[f(x)]^2$.

Suy ra $Q=0 \Rightarrow m^2U^2+nU+k \le 0 \Leftrightarrow U_1 \le U \le U_2 \Rightarrow$ **{Min U = U_1; MaxU = U_2}**

Thí dụ 9

Giả sử x và y liên hệ với nhau bởi biểu thức $Q = 36x^2 + 16y^2 - 9 = 0$. (1)

Tìm GTLN, GTNN của $U = y - 2x + 5$ (2)

Lời giải

Viết lại (2) <=> $y = 2x + U - 5$ (3)

Thế vào (1) có : $100x^2 + 64(U-5)x + 16(U-5)^2 - 9 = 0$ (4)

Xem (4) là phương trình đối với ẩn x.

$\Delta' = 32^2(U-5)^2 - 100[16(U-5)^2-9] = 900-576(U-5)^2$

Phương trình (4) có nghiệm <=> $\Delta' \ge 0$ <=> $900-576(U-5)^2 \ge 0$

$\Leftrightarrow 16(U-5)^2 \le 25 \Leftrightarrow |U-5| \le \frac{5}{4} \Leftrightarrow \frac{15}{4} \le U \le \frac{25}{4}$

Dấu đẳng thức : $U=\frac{15}{4} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{B'}{A} = -\frac{8(U-5)}{25} = \frac{2}{5} \\ y \overset{(3)}{=} 2x - \frac{5}{4} = -\frac{9}{20} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2}{5} \\ y = -\frac{9}{20} \end{cases}$

$U=\frac{25}{4} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{B'}{A} = -\frac{8(U-5)}{25} = -\frac{2}{5} \\ y \overset{(3)}{=} 2x + \frac{5}{4} = \frac{9}{20} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{2}{5} \\ y = \frac{9}{20} \end{cases}$

- Do vậy GTNN(U)= $\frac{15}{4}$; GTLN(U)= $\frac{25}{4}$.

Thí dụ 10.

Cho x, y là các số thực liên hệ với nhau bởi hệ thức

$$Q = (x^2 - y^2+1)^2+4x^2y^2-x^2-y^2=0 \quad (1)$$

Chứng minh $\frac{3-\sqrt{5}}{2} \le x^2+y^2 \le \frac{3+\sqrt{5}}{2}$ (2)

Lời giải

Cách 1 (Tư tưởng cách 1)

Gọi U= $x^2 + y^2$, cấu trúc biểu thức Q sẽ có dạng

Q= $\left(U - \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}\right)\left(U - \dfrac{3-\sqrt{5}}{2}\right) + [f(x,y)]^2$ *Do* $[f(x;y)]^2 \geq 0, \forall x$ *nên từ*

$$Q = 0 \Rightarrow \left(U - \frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)\left(U - \frac{3-\sqrt{5}}{2}\right) \leq 0 \Rightarrow \text{có (2).} \quad (\text{đpcm}).$$

Trong (2) xảy ra dấu đẳng thức ⇔ Q=0 ⇔ $f(x, y)=0$

- Ta có $Q = [(x^2 - y^2)+1]^2 + 4x^2y^2 - x^2 - y^2 = (x^2 - y^2)^2 + 2(x^2 - y^2) + 1 + 4x^2y^2 - x^2 - y^2$
  $= [x^2 + y^2]^2 - 3(x^2 + y^2) + 1 + 4x^2 = U^2 - 3U + 1 + 4x^2$

Vì thế (1) ⇔ $U^2 - 3U + 1 + 4x^2 = 0 \Leftrightarrow \left(U - \dfrac{3}{2}\right)^2 = \dfrac{5}{4} - 4x^2 \Rightarrow \left|U - \dfrac{3}{2}\right| \leq \dfrac{\sqrt{5}}{2}, \forall x$

$\Leftrightarrow \dfrac{3-\sqrt{5}}{5} < U \leq \dfrac{3+\sqrt{5}}{5}$, $\forall x \in R$, dấu đẳng thức có khi x=0 (đpcm)

- Dấu đẳng thức : $U = \dfrac{3-\sqrt{5}}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 + y^2 = \dfrac{3-\sqrt{5}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2} \end{cases}$

$$U = \frac{3+\sqrt{5}}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 + y^2 = \dfrac{3+\sqrt{5}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = \dfrac{\sqrt{5}+1}{2} \end{cases}$$

- Do vậy : GTNN(U)= $\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$; GTLN(U) = $\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$

Cách 2 (Tư tưởng cách 2)

Gọi K= $\left(\dfrac{3+\sqrt{5}}{2} - U\right)\left(U - \dfrac{3-\sqrt{5}}{2}\right)$

Điều cần chứng minh ⇔ K≥0, ∀x∈R, ∀y∈R

⇒ ∃p^2, ∃ $f(x; y)$: $K + p^2Q = [f(x; y)]^2$

Ta có mệnh đề tương đương Q=0 ⇔ $K = [f(x; y)]^2$.

Từ đó thu được kết quả cần tìm.

- Gọi $K = \left(\dfrac{3+\sqrt{5}}{2} - U\right)\left(U - \dfrac{3-\sqrt{5}}{2}\right) = -U^2 + 3U - 1 = -(x^2 + y^2)^2 + 3(x^2 + y^2) - 1$

$\Rightarrow Q + K = [(x^2 - y^2 + 1)^2 + 4x^2y^2 - x^2 - y^2] - (x^2 + y^2)^2 + 3(x^2 + y^2) - 1$
$= (2x^2 + 1)(1 - 2y^2) + 4x^2y^2 - 1 + 2(x^2 + y^2)$
$= -4x^2y^2 + 2x^2 - 2y^2 + 1 + 4x^2y^2 - 1 + 2(x^2 + y^2) = 4x^2$

Bởi thế Q=0 ⇔ $K = 4x^2 \Rightarrow K \geq 0$, x∈R, dấu đẳng thức có khi x= 0.

• $E > 0, \forall x \in R \Leftrightarrow U^2 - 3U + 1 > 0, \forall x \in R \Leftrightarrow \frac{3 - \sqrt{5}}{5} < U < \frac{3 + \sqrt{5}}{5}, \forall x \in R$ (đpcm).

• Dấu đẳng thức : $U = \frac{3 - \sqrt{5}}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 + y^2 = \frac{3 - \sqrt{5}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} \end{cases}$

$$U = \frac{3 + \sqrt{5}}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 + y^2 = \frac{3 + \sqrt{5}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = \frac{\sqrt{5} + 1}{2} \end{cases}$$

• Do vậy : GTNN(U)= $\frac{3 - \sqrt{5}}{2}$; GTLN(U) = $\frac{3 + \sqrt{5}}{2}$

Thí dụ 11.

Cho x, y, z là nghiệm của hệ $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 8 & (1) \\ xy + yz + zx = 4 & (2) \end{cases}$

Chứng minh $-\frac{8}{3} \le x; y; z \le \frac{8}{3}$

Lời giải

Nhân 2 vế của (2) với 2, rồi cộng theo từng vế vào (1) ta có : $(x+y+z)^2 = 16$

Đặt $S = x + y + z$, ta có $S^2 = 16$, $x + y = S - z$ (3)

Từ (2) => $xy = 4 - (x + y)z = 4 - (S - z)z = 4 - Sz + z^2$ (4)

Từ (3), (4) => x, y là nghiệm phương trình (ẩn t) : $t^2 - (S - z)t + 4 - Sz + z^2 = 0$ (5)

Gọi $\Delta = (S - z)^2 - 4(4 - Sz + z^2) = -3z^2 + 2Sz + (S^2 - 16)$

Hệ đã cho có nghiệm <=> phương trình (5) có nghiệm <=> $\exists$ z thoả mãn : $\Delta \ge 0$

$\Leftrightarrow -3z^2 + 2Sz + (S^2 - 16) \ge 0 \Leftrightarrow -3z^2 + 2Sz \ge 0$ (6)

Để ý: Từ (6) suy ra $Sz \ge 0 \Rightarrow Sz = |S|.|z| = 4|z|$

Bởi thế (6) $\Leftrightarrow -3|z|^2 + 8|z| \ge 0 \Leftrightarrow |z| \le \frac{8}{3}$ Hay $-\frac{8}{3} \le z \le \frac{8}{3}$

Đổi vai trò z lần lượt cho x, y ta thu được $-\frac{8}{3} \le x, y, z \le \frac{8}{3}$ (đpcm)

Thí dụ 12.

Cho $a + b + c = 6$. (1)

Hãy chứng minh $a^2 + b^2 + c^2 \ge 12$ (2)

Lời giải

Cách 1. Ta có (1) <=> $c = 6 - a - b$, thế vào (2) có $a^2 - (6 - b)a + (b^2 - 6b + 12) \ge 0$ (3)

Xem (3) là bất phương trình đối với ẩn a, $\Delta = -3(b - 2)^2$.

Gọi vế trái của (3) là Q.

Áp dụng (I) ta có $Q=\left(a+\frac{6-b}{2}\right)^2+\frac{3}{4}(b-2)^2\geq 0 \Rightarrow Q\geq 0$ (đpcm)

Dấu đẳng thức có khi : $\begin{cases} b-2=0 \\ 2a+6-b=0 \\ c=6-a-b \end{cases} \Leftrightarrow a=b=c=2$

Cách 2. Theo Bunhiacopski ta có $6^2=(a+b+c)^2\leq(1^2+1^2+1^2)(a^2+b^2+c^2)$

$\Rightarrow a^2+b^2+c^2\geq 12$ (đpcm). **Dấu đẳng thức có khi** $\begin{cases} a=b=c \\ a+b+c=6 \end{cases} \Leftrightarrow a=b=c=2$

Cách 3. Với mọi $a\in R$ **luôn có :**

$$\begin{cases}(a-2)^2\geq 0\\(b-2)^2\geq 0\\(c-2)^2\geq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a^2-4a+4\geq 0\\b^2-4b+4\geq 0\\c^2-4c+4\geq 0\end{cases} \Rightarrow a^2+b^2+c^2-4(a+b+c)+12\geq 0 \quad (4)$$

Thay $a+b+c=6$ vào (3) có $a^2+b^2+c^2-4.6+12\geq 0 \Leftrightarrow a^2+b^2+c^2\geq 12$

Dấu đẳng thức có khi $a=b=c=2$. **(đpcm)**

BÀI TẬP

Mời các bạn áp dụng **phương pháp trên cùng các cách** khác có thể để làm các bài tập sau

Bài 1. Chứng minh $\forall x\in R, \forall y\in R$ **luôn có :**

b) $Q=x^2y^4-4xy^3+2.(x^2+2).y^2+4xy+x^2\geq 0$

c) $Q=25(x^2+y^2)+(12-3x-4y)^2-72\geq 0$

Bài 2. Tìm GTNN của $Q=19x^2+54y^2+16z^2+36xy-16xz-24yz$

Hướng dẫn :

Viết lại $Q=19x^2-2(8z-18y)x+54y^2+16z^2-24yz$; $\Delta'_x=2U$

Với $U=351y^2-84yz+120z^2$. **Xem Q đa thức đối với ẩn x,**

Để ý : $\Delta_y=-40356z^2\leq 0, \forall z\in R \Rightarrow U\geq 0, \forall z\in R$

$\Rightarrow \Delta'_x\leq 0, \forall z\in R \Rightarrow Q\geq 0, \forall x\in R, \forall y\in R, \forall z\in R$ **(đpcm)**

Dấu đẳng thức có khi $x=y=z=0$

Bài 3. a, b, c là độ dài **ba cạnh** ΔABC. **Chứng minh rằng**

$$pa^2+qb^2>pqc^2, \forall p,q\in R \text{ thoả : } p+q=1$$

Bài 4. Chứng minh $a^2+b^2+c^2+d^2+e^2\geq a(b+c+d+e)$, với mọi a, b, c, d, e thuộc R

Bài 5. Cho a, b, c, d, m là các **số thực thoả mãn** $a+c=b+d$ và $2m>|ad-bc|$.

Chứng minh $(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)+m^2\geq 0$

Bài 6. Giả sử x và y liên hệ **với nhau bởi hệ thức** $x^2+5y^2-4xy-x+2y-6=0$.

Chứng minh $-1\leq x-2y+1\leq 4$

Bài 7. Tìm GTLN, GTNN của $U=x+y+1$, **biết rằng :**

$$x^2+2xy+7(x+y)+2y^2+10=0$$

Bài 8. Tìm GTLN, GTNN của $U = \frac{x}{3} - \frac{y}{4} + 1$, biết rằng : $x^2 + y^2 - 6x + 2y + 6 = 0$.

Bài 9. Tìm tập giá trị của x, y biết rằng $x^2 + 12xy + 4y^2 + 4x + 8y + 20 = 0$

Bài 10. Cho x, y, z là nghiệm của hệ $\begin{cases} x + y + z = 5 \\ xy + yz + zx = 8 \end{cases}$

Chứng minh $1 \le x; y; z \le \frac{7}{3}$

Bài 11. Cho x, y, z là nghiệm của hệ $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 2 \\ xy + yz + zx = 1 \end{cases}$

Chứng minh $-\frac{4}{3} \le x; y; z \le \frac{4}{3}$

Bài 12 Tìm GTLN, GTNN của các biểu thức Q sau đây :

1) $Q = \frac{3y^2 - 4xy}{x^2 + y^2}$ 2) $Q = \frac{1 + x^4}{(1 + x^2)^2}$ 3) $Q = \frac{x^2 - xy + y^2}{x^2 + xy + y^2}$

4) $Q = \frac{x^2 + 8x + 7}{x^2 + 1}$ 5) $Q = \frac{2x + 3}{x^2 + x + 1}$ 6) $Q = \frac{2x - 1}{x^2 + x + 4}$

Bài 13. Tìm m để biểu thức $Q = \frac{x + m}{x^2 + x + 1}$ chỉ nhận giá trị thuộc $[-1; 1]$

Bài 14. Với giá trị nào của m thì $\frac{2}{3} \le \frac{x^2 - mx + 1}{x^2 - x + 1} \le \frac{3}{2}, \forall x \in R$.

Bài 15. Tìm $\min_R Q$, với $Q = 19x^2 + 54y^2 + 16z^2 + 36xy - 16xz - 24y$

Bài 16. Cho x, y là các số thực không âm thoả mãn $2x^2 + 2y^2 - xy = 1$

Tìm GTLN và GTNN của biểu thức $Q = 7(x^4 + y^4) + 4x^2y^2$

(Học sinh giỏi lớp 10, tỉnh Hà tĩnh, năm học 1998 - 1999)

§4. XUNG QUANH DẤU HIỆU NHẬN BIẾT PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI CÓ NGHIỆM

I. Các dấu hiệu nhận biết phương trình bậc hai có nghiệm $f(x) = ax^2 + bx + c = 0$, $\Delta = b^2 - 4ac$

1. $\Delta \ge 0$ $(\Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3 + ... + \Delta_n \ge 0)$
2. $ac < 0$ $(\Leftrightarrow x_1 < 0 < x_2)$
3. $a \pm b + c = 0$ $(\Leftrightarrow x = \mp 1;\ x = \mp c/a)$
4. $\exists \alpha \in R : af(\alpha) < 0$
5. $\exists \alpha, \beta \in R : f(\alpha)f(\beta) < 0$
6. $\exists \alpha, \beta, p, q \in R, p^2 + q^2 \ne 0 :\ p^2 f(\alpha) + q^2 f(\beta) = 0$

Chú ý: Trừ dấu hiệu 1, các dấu hiệu còn lại áp dụng cho mọi phương trình đa thức (xem thí dụ 6).

II. Các thí dụ

Thí dụ 1. (Chứng minh dấu hiệu 4)
Cho phương trình $f(x) = ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$ và α là số thực thoả $af(\alpha) < 0$.
Chứng minh phương trình $f(x) = 0$ có nghiệm.

Lời giải

Do $a \neq 0$ nên $f(x) = a(x^2 + \frac{b}{a}x) + c = a(x^2 + 2x\frac{b}{2a} + \frac{b^2}{4a^2}) - \frac{b^2 - 4ac}{4a}$

$\Leftrightarrow f(x) = a(x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{\Delta}{4a} \Leftrightarrow af(x) = a^2(x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{\Delta}{4}$

$\Leftrightarrow af(\alpha) = a^2(\alpha + \frac{b}{2a})^2 - \frac{\Delta}{4}$.

Suy ra $af(\alpha) \leq 0 \Leftrightarrow a^2(\alpha + \frac{b}{2a})^2 - \frac{\Delta}{4} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{\Delta}{4} \geq a^2(\alpha + \frac{b}{2a})^2 \Rightarrow \Delta \geq 0$

$\Rightarrow$ Phương trình (1) có nghiệm. (đpcm)

Thí dụ 2. (Chứng minh dấu hiệu 6)
Cho $f(x)=ax^2+bx+c$, $a \neq 0$ và α, β, p, q là các số thực với $p^2 + q^2 \neq 0$ thoả mãn
$p^2f(\alpha)+q^2f(\beta)=0$ (1)
Chứng minh phương trình $f(x) = 0$ có nghiệm.

Lời giải

Trường hợp 1: Có một trong hai số p hoặc q bằng không. Giả sử $q = 0$.

Từ giả thiết suy ra $p \neq 0$, và (1) $\Leftrightarrow p^2f(\alpha) = 0 \Leftrightarrow f(\alpha) = 0 \Leftrightarrow$ phương trình có nghiệm $x= \alpha$. (có đpcm)

Trường hợp 2: $pq \neq 0$. Khi đó (1) $\Rightarrow \left[\begin{array}{ll} f(\alpha) = f(\beta) = 0 & (2.1) \\ f(\alpha).f(\beta) < 0 & (2.2) \end{array}\right.$

- Nếu là (2.1) : phương trình có các nghiệm $x=\alpha$, $x=\beta$. (có đpcm)
- Nếu là (2.2) : phương trình có 2 nghiệm phân biệt trong đó đúng một nghiệm thuộc $(\alpha; \beta)$. (có đpcm)

Thí dụ 3.
Chứng minh các phương trình sau có nghiệm với mọi a, b, c.
1) $x^2 + (a + b)x - 2(a^2 - ab + b^2) = 0$
2) $x(x - a) + x(x - b) + (x - a)(x - b) = 0$
3) $ab(x - a)(x - b) + bc(x - b)(x - c) + ca(x - c)(x - a) = 0$

Lời giải

1) Gọi $f(x)= x^2 + (a + b)x - 2(a^2 - ab + b^2)$
Cách 1 : $\Delta = (a + b)^2 + 8(a^2 - ab + b^2) = 3(a + b)^2 + 6a^2 + 6b^2 \geq 0$, $\forall a,b$
Suy ra phương trình đã cho có nghiệm với mọi a, b. (có đpcm)
Cách 2 : $f(0) = -2(a^2 - ab + b^2) = -(a + b)^2 - a^2 - b^2$

+ Nếu $a = b = 0 \Rightarrow f(0) = 0 \Leftrightarrow$ Phương trình có nghiệm $x = 0$.

+ Nếu $a^2 + b^2 \neq 0 \Rightarrow 1.f(0) = -(a - b)^2 - a^2 - b^2 < 0, \forall a, b$

$\Leftrightarrow$ Phương trình có 2 nghiệm phân biệt trái dấu.

Tóm lại phương trình luôn có nghiệm với $\forall a, \forall b$. (đpcm)

2) Gọi $f(x) = x(x - a) + x(x - b) + (x - a)(x - b)$.

• *Cách 1*: Khai triển $f(x)$ ta có $f(x) = 3x^2 - 2(a + b)x + ab$

Ta có $\Delta' = (a + b)^2 - 3ab = a^2 + b^2 - ab = \frac{1}{2}[(a - b)^2 + a^2 + b^2] \geq 0, \forall a, b$

$\Leftrightarrow$ Phương trình đã cho luôn có nghiệm. (có đpcm)

• *Cách 2* : Ta có : $f(0) = ab$, $f(a) = a(a - b)$, $f(b) = b(b - a)$.

Suy ra $f(0).f(a).f(b) = -a^2b^2(a - b)^2$

+ $a = 0$: sẽ có $f(0) = f(a) = 0 \Leftrightarrow$ Phương trình có nghiệm $x = 0$, $x = a$.

+ $b = 0$: sẽ có $f(0) = f(b) = 0 \Leftrightarrow$ Phương trình có nghiệm $x = 0$, $x = b$.

+ $a = b$: sẽ có $f(a) = f(b) = 0 \Leftrightarrow$ Phương trình có nghiệm $x = a$, $x = b$.

+ $a \neq 0$; $b \neq 0$, $a \neq b$: sẽ có $f(0).f(a).f(b) = -a^2b^2(a - b)^2 < 0 \Rightarrow$ Trong 3 số $f(0)$, $f(a)$, $f(b)$ ắt phải có một số âm. Chẳng hạn $f(a) < 0$ (*)

Để ý rằng $f(x)$ có hệ số của x^2 là $3>0$ (**)

Từ (*) và (**) suy ra phương trình đã cho có 2 nghiệm thoả $x_1<a<x_2$.

Các kết quả trên chứng tỏ trong mọi trường hợp, phương trình đã cho luôn có nghiệm (đpcm).

3) Gọi $f(x) = ab(x - a)(x - b) + bc(x - b)(x - c) + ca(x - c)(x - a)$

Ta có : $f(a) = bc(a - b)(a - c)$, $f(b) = ca(b - c)(b - a)$, $f(c) = ab(c - a)(c - b)$

$\Rightarrow f(a)f(b)f(c) = -a^2b^2c^2(a - b)^2(b - c)^2(c - a)^2$. Suy ra :

+ $a = 0$ hoặc $b = c \Rightarrow f(b) = f(c) = 0 \Leftrightarrow$ Phương trình có nghiệm $x = b$, $x = c$.

+ $b = 0$ hoặc $a = c \Rightarrow f(a) = f(c) = 0 \Leftrightarrow$ Phương trình có nghiệm $x = a$, $x = c$.

+ $c = 0$ hoặc $b = a \Rightarrow f(a) = f(b) = 0 \Leftrightarrow$ Phương trình có nghiệm $x = a$, $x = b$.

+ $abc(a - b)(b - c)(c - a) \neq 0 \Rightarrow f(a)f(b)f(c) < 0 \Rightarrow$ Trong 3 số $f(a)$, $f(b)$, $f(c)$ ắt có một số âm. Chẳng hạn $f(a) < 0$ (*)

Lại có : $f(0) = a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 > 0$ (**)

Từ (*), (**) $\Rightarrow f(0).f(a)<0$ suy ra phương trình đã cho có 2 nghiệm phân biệt. Các kết quả trên chứng tỏ trong mọi trường hợp, phương trình đã cho luôn có nghiệm. (đpcm)

Thí dụ 4.

Cho a, b, c, p, q là các số thực thoả mãn $a + pb + qc = 0$ (1) ; $q > 0$; $q \geq p^2$ (2)

Chứng minh phương trình $f(x) = ax^2 + bx + c = 0$ (3) luôn có nghiệm.

Lời giải

Trường hợp 1. $p = 0$. Khi đó (1) $\Leftrightarrow a = -qc$. (4)

Phương trình (3) trở thành $-qcx^2 + bx + c = 0$. Suy ra:

+ Nếu $c = 0$, phương trình (3) có nghiệm, ít ra là $x = 0$

+ Nếu $c \neq 0$, kết hợp với $q > 0$ và (4) suy ra $a \neq 0$. Do vậy phương trình (3) có $\Delta = b^2 + 4qc^2 \geq 0$. Suy ra phương trình (3) có nghiệm. (đpcm)

Trường hợp 2. $p \neq 0$. Khi đó, chia hai vế cho $p^2 > 0$, ta có

$$(1) \Leftrightarrow \left(a\frac{1}{p^2} + b\frac{1}{p} + c\right) + \left(\frac{q}{p^2} - 1\right)c = 0 \Leftrightarrow f\left(\frac{1}{p}\right) + \frac{q - p^2}{p^2} f(0) = 0 \qquad (5)$$

+ $q = p^2$: (5) $\Leftrightarrow f\left(\frac{1}{p}\right) = 0 \Rightarrow$ Phương trình có nghiệm $x = \frac{1}{p}$ (đpcm)

+ $q > p^2 \Leftrightarrow q - p^2 > 0$: (5) $\Rightarrow \left[\begin{array}{ll} f(\frac{1}{p}) = f(0) = 0 & (6.1) \\ f(\frac{1}{p})f(0) < 0 & (6.2) \end{array}\right.$

Suy ra :

- Nếu là (6. 1) : Phương trình có 2 nghiệm phân biệt : $\{x_1 = 0;\ x_2 = \frac{1}{p}\}$ (đpcm)

- Nếu là (6. 2) : Phương trình có 2 nghiệm phân biệt, trong đó một nghiệm nằm giữa 0 và $\frac{1}{p}$ (đpcm)

Tóm lại trong mọi trường hợp, phương trình đã cho luôn có nghiệm. (có đpcm)

Chẳng hạn:

• (1) *là hệ thức* $2a + 3b + 6c = 0$ (1')

Ta có (1') $\Leftrightarrow a + \frac{3}{2}b + 3c = 0 \Leftrightarrow \frac{4}{9}(a + b\frac{3}{2} + 3c) = 0$

$$\Leftrightarrow \left(a\frac{4}{9} + b\frac{2}{3} + c\right) + \frac{1}{3}c = 0 \Leftrightarrow f\left(\frac{2}{3}\right) + \frac{1}{3}f(0) = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} f(\frac{2}{3}) = f(0) = 0 \\ f(\frac{2}{3})f(0) < 0 \end{array}\right.$$

$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{Phương trình có nghiệm hai nghiệm } x=0;\ x=\frac{2}{3} \\ \text{Phương trình có hai nghiệm trong đó một nghiệm thuộc } (0;\ 1) \end{array}\right. \Rightarrow$ (đpcm)

Cách khác: (1') $\Leftrightarrow c + (a + b + c) + 4\left(\frac{a}{4} + \frac{b}{2} + c\right) = 0 \Leftrightarrow f(0) + f(1) + f\left(\frac{1}{2}\right) = 0.$

Bấy giờ có hai trường hợp xảy ra :

Trường hợp 1. $f(0) = f\left(\frac{1}{2}\right) = f(1) = 0 \Rightarrow f(x) \equiv 0, \forall x \in R$

$\Rightarrow f(x)$ nghiệm với $\forall x \in R$. Có đpcm

Trường hợp 2. $|f(0)| + \left|f\left(\frac{1}{2}\right)\right| + |f(1)| \neq 0 \Rightarrow$ Trong 3 số $\{f(0), f\left(\frac{1}{2}\right), f(1)\}$ ắt phải có một số trái dấu với 2 số còn lại.

Nếu $f(0).f\left(\frac{1}{2}\right)<0$ <> **Phương trình có hai nghiệm** trong đó có một nghiệm thuộc $\left(0;\frac{1}{2}\right)$. Có đpcm

- Nếu $f(0).f(1)<0$ <> **Phương trình có hai nghiệm** trong đó có một nghiệm thuộc (0; 1). Có đpcm

Nếu $f(1).f\left(\frac{1}{2}\right)<0$ <> **Phương trình có hai nghiệm** trong đó có một nghiệm thuộc $\left(\frac{1}{2};1\right)$. Có đpcm

• (1) *là hệ thức* $5a + 3b + 2c = 0$ (2')

Ta có (2') <> $a+\frac{3}{5}b+\frac{2}{5}c=0$ <> $\frac{25}{9}\left(a+\frac{3}{5}b+\frac{2}{5}c\right)=0$

$$\Leftrightarrow \left(a\frac{25}{9}+b\frac{5}{3}+c\right)+\frac{1}{9}c=0 \Leftrightarrow f\left(\frac{5}{3}\right)+\frac{1}{9}f(0)=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} f(0)=f\left(\frac{5}{3}\right)=0 \\ f(0).f\left(\frac{5}{3}\right)<0 \end{array}\right.$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{phương trình có 2 nghiệm } x=0;\ x=\frac{5}{3} \\ \text{phương trình có 2 nghiệm trong đó 1 nghiệm thuộc } \left(0;\frac{5}{3}\right) \end{array}\right. \Rightarrow \text{đpcm}$$

Cách khác : (2') $\Leftrightarrow$ $(4a + 2b + c) + (a + b + c)=0$ <> $f(2)+f(1)=0$ $\Rightarrow \left[\begin{array}{l} f(2)=f(1)=0 \\ f(2).f(1)<0 \end{array}\right.$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{phương trình có 2 nghiệm } x=1;\ x=2 \\ \text{phương trình có 2 nghiệm trong đó 1 nghiệm thuộc } (1;\ 2) \end{array}\right. \Rightarrow \text{đpcm}$$

• (1) *là hệ thức* $\frac{a}{m+2}+\frac{b}{m+1}+\frac{c}{m}=0$ (**m là số thực dương**). (3')

Cách 1. Ta có (3') <> $\frac{(m+1)^2}{m+2}\left(\frac{a}{m+2}+\frac{b}{m+1}+\frac{c}{m}\right)=0$

$$\Leftrightarrow \left[a\left(\frac{m+1}{m+2}\right)^2+b\frac{m+1}{m+2}+c\right]+\frac{c}{m(m+2)}=0$$

$$\Leftrightarrow f\left(\frac{m+1}{m+2}\right)+\frac{1}{m(m+2)}f(0)=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} f\left(\frac{m+1}{m+2}\right)=f(0)=0 \\ f\left(\frac{m+1}{m+2}\right).f(0)<0 \end{array}\right.$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l}\text{phương trình có 2 nghiệm}: x = 0;\ x = \dfrac{m+1}{m+2} \\ \text{phương trình có 2 nghiệm trong đó 1 nghiệm thuộc } \left(0;\ \dfrac{m+1}{m+2}\right)\end{array}\right. \Rightarrow \text{đpcm}$$

Chú ý: *Khi m=1, hệ thức (3') trở thành hệ thức (1').*

> **Thí dụ 5**
> Cho a, b, c, d là các số thực thoả mãn : $a < b < c < d$.
> Chứng minh $\forall p, q \in R$ phương trình $f(x) = 0$ luôn có nghiệm, với :
> 1) $f(x) = p(x - a)(x - c) + q(x - b)(x - d)$
> 2) $f(x) = p(x - a)(x - c) + q(x - b)$

Lời giải

1) Từ giả thiết $a < b < c < d \Rightarrow (a - b)(a - d) > 0; (c - b)(c - d) < 0$

$\Rightarrow (a - b)(a - d)(c - b)(c - d) < 0$ (1)

Ta có $f(a) = q(a-b)(a - d), \forall p \in R; f(c) = q(c - b)(c - d), \forall p \in R$

$\Rightarrow f(a).f(c) = q^2(a-b)(a-d)(c-b)(c-d), \forall p \in R$

• $q = 0 \Rightarrow f(a) = f(c) = 0 \Rightarrow$ Phương trình có 2 nghiệm phân biệt $x = a$, $x = c$. (2)

• $q \neq 0$, kết hợp với (1) $\Rightarrow f(a)f(c) < 0$

$\Rightarrow$ Phương trình có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2 thoả mãn $\left[\begin{array}{l} a < x_1 < c < x_2 \\ x_1 < a < x_2 < c \end{array}\right.$ (3)

Từ (2), (3) kết luận : Phương trình đã cho có 2 nghiệm phân biệt $\forall p, \forall q$ (đpcm)

2) Từ $a < b < c < d \Rightarrow (a-b)(c-b) < 0$ (4)

Xét $f(a) = q(a-b), \forall p$; $f(c) = q(c-b), \forall p \Rightarrow f(a).f(c) = q^2(a-b)(c-b), \forall p$

• $q = 0 \Rightarrow f(a) = f(c) = 0 \Rightarrow$ Phương trình có 2 nghiệm phân biệt $x=a$, $x=c$. (5)

• $q \neq 0$, kết hợp với (4) $\Rightarrow f(a)f(c) < 0 \Rightarrow$ Phương trình có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2 thoả mãn $\left[\begin{array}{l} a < x_1 < c < x_2 \\ x_1 < a < x_2 < c \end{array}\right.$ (6)

Từ (5), (6) kết luận phương trình đã cho có 2 nghiệm phân biệt $\forall p, \forall q$. (đpcm)

Lời bình. *Phương trình có nghiệm không phụ thuộc vào p, q, mà hai đại lượng này không có điều kiện ràng buộc nào để đánh giá, nên ta xét các giá trị đặc biệt làm triệt tiêu p hoặc q*

> **Thí dụ 6.** (Học sinh giỏi lớp 12 tỉnh Hà Tĩnh, năm học 1996-1997)
> Chứng minh rằng :
> Nếu phương trình $ax^2 + (c - b)x + e - d = 0$ (1) có nghiệm lớn hơn 1, thì phương trình $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$ (2) có ít nhất một nghiệm.

Lời giải

Gọi $x_0 > 1$ là nghiệm của phương trình (1), tức là $ax_0^2 + (c-b)x_0 + e - d = 0$

$\Leftrightarrow ax_0^2 + cx_0 + e = bx_0 + d$ (3)

Gọi $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e \Leftrightarrow f(x) = (ax^4 + cx^2 + e) + x(bx^2 + d)$.

Do $x_0 > 1$ nên $1 \pm \sqrt{x_0}$ và $1 - x_0 < 0$ (4)

Xét $f\left(\sqrt{x_0}\right) = (ax_0^2 + cx_0 + e) + \sqrt{x_0}\,(bx_0 + d)$ (5)

Thay (3) vào (5) có $f\left(\sqrt{x_0}\right) = (1 + \sqrt{x_0})(bx_0 + d)$ (6)

Tương tự có $f\left(-\sqrt{x_0}\right) = (1 - \sqrt{x_0})(bx_0 + d)$ (7)

Từ (6), (7) dẫn tới $f\left(\sqrt{x_0}\right).f\left(-\sqrt{x_0}\right) = (1 - x_0)(bx_0 + d)^2 \le 0$. Suy ra phương trình (2) có nghiệm. (đpcm)

Thí dụ 7.

Chứng minh tập hợp nghiệm của tập hợp các phương trình sau đây khác rỗng :

1) Hai phương trình $x^2 + p_1x + q_1 = 0$; $x^2 + p_2x + q_2 = 0$ trong đó p_1, p_2, q_1, q_2 là các số thực thoả mãn $p_1p_2 > 2(q_1 + q_2)$

2) Ba phương trình $ax^2 + 2bx + c = 0$; $bx^2 + 2cx + a = 0$; $cx^2 + 2ax + b = 0$ trong đó a, b, c là các số thực bất kỳ.

Lời giải

1) Gọi $\Delta_1 = p_1^2 - 4q_1$; $\Delta_2 = p_2^2 - 4q_2$.

Ta có $\Delta_1 + \Delta_2 = p_1^2 + p_2^2 - 4(q_1 + q_2) = p_1^2 + p_2^2 - 2p_1p_2 + 2[p_1p_2 - 2(q_1 + q_2)]$

$= (p_1 - p_2)^2 + 2[p_1p_2 - 2(q_1 + q_2)]$ (1)

Theo giả thiết $p_1p_2 > 2(q_1 + q_2) \Leftrightarrow p_1p_2 - 2(q_1 + q_2) > 0$. Lại có $(p_1 - p_2)^2 \ge 0$

Do vậy từ (1) suy ra $\Delta_1 + \Delta_2 > 0$. Vì thế, trong hai số Δ_1, Δ_2 có ít nhất một số không âm hay trong hai phương trình đã cho, ít nhất một phương trình có nghiệm. (đpcm)

2) Gọi $\Delta'_1 = b^2 - ac$; $\Delta'_2 = c^2 - ab$; $\Delta'_3 = a^2 - bc$

Ta có $\Delta'_1 + \Delta'_2 + \Delta'_3 = a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca = \frac{1}{2}\left[(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2\right] \ge 0$

Suy ra trong 3 số Δ'_1, Δ'_2, Δ'_3 có ít nhất một số không âm hay trong ba phương trình đã cho, ít nhất một phương trình có nghiệm. (đpcm)

Thí dụ 8.

Các phần tử của A sơn xanh, các phần tử của B sơn đỏ. Người ta xếp các phần tử của A và B lên một trục số. Tìm m để $A \cup B$ có 4 phần tử và 2 phần tử cùng màu của chúng không đứng kề nhau. Với:

1) $A = \{x \in R \mid x^2 - 6x + m = 0\}$ (1) ; $B = \{x \in R \mid x^2 - 5x - m = 0\}$ (2)

2) $A = \{x \in R \mid x^2 - x + 2m = 0\}$; $B = \{x \in R \mid x^2 + x + m - 2 = 0\}$

Trong bài toán này hiểu đối tượng tập hợp là các số thực.

Hai phần tử khác nhau nếu và chỉ nếu các số biểu thị chúng khác nhau

Lời giải

1) *Rõ ràng $A \cup B$ có 4 phần tử và 2 phần tử cùng màu của chúng không đứng kề nhau khi và chỉ khi các phương trình $x^2-6x+m=0$, $x^2-5x-m=0$ có nghiệm xen kẽ.*

• *Cách 1 (Sử dụng định lý đảo của tam thức bậc 2)*

Gọi $f_1(x) = x^2 - 6x + m$; $g_1(x) = x^2 - 5x - m$. Rõ ràng $f_1(x) = g_1(x) - x + 2m$.

Lại gọi $x_{1,2}$ là các nghiệm (*nếu có*) của $g_1(x)$.

Suy ra $f_1(x_{1,2}) = 2m - x_{1,2}$. Ký hiệu $\Pi=f_1(x_1)f_1(x_2)$.

Hai phương trình có nghiệm xen kẽ khi và chỉ khi phương trình $g_1(x)=0$ có hai nghiệm phân biệt x_1; x_2 thoả mãn $\Pi = f_1(x_1)f_1(x_2) < 0$.

+ Phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow$ $\Delta_g > 0 \Leftrightarrow 25 + 4m$

$\Leftrightarrow m > -\dfrac{25}{4}$. (2)

+ $\Pi = (2m - x_1)(2m - x_2) = x_1x_2 - 2m(x_1 + x_2) + 4m^2$ (3)

Theo Vi-et $x_1x_2=-m$; $x_1+x_2=5$; thay vào (3) có $\Pi=4m^2-11m$. (4)

Bởi thế : $\Pi < 0 \Leftrightarrow 4m^2 - 11m < 0 \Leftrightarrow 0 < m < \dfrac{11}{4}$.

Từ (3), (4) kết luận : Tập hợp các giá trị phải tìm của m là $0< m < \dfrac{11}{4}$.

• *Cách 2 (Dùng đồ thị để tìm miền giá trị)*

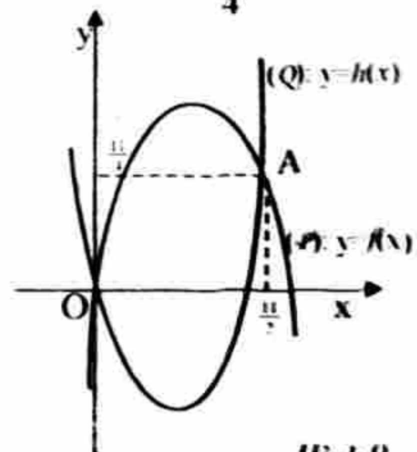
Viết lại (1) $\Leftrightarrow m = f(x) = -x^2 + 6x$

(2) $\Leftrightarrow m = h(x) = x^2 - 5x$

Vẽ các parabol (P): $y= f(x)$; (Q): $y= h(x)$

Thấy rằng $(P)\cap(Q)=\{O(0; 0), A(\dfrac{11}{2}; \dfrac{11}{4})\}$

Căn cứ vào đồ thị suy ra tập hợp giá trị phải tìm của m là $0<m<\dfrac{11}{4}$. (h. 9)



Hình 9

• *Cách 3 (Tung độ giao điểm 2 parabol âm)*

Vẽ các parabol (P) : $y= x^2-6x+m$;

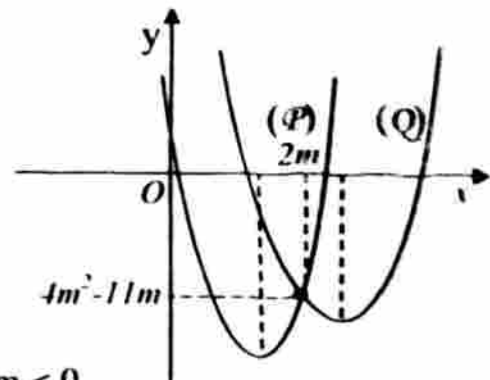
(Q) : $y=g(x)=x^2-5x-m$. (4)

Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (Q) là $x^2-6x+m=x^2-5x-m \Leftrightarrow x=2m$

Thay vào (4) có tung độ giao điểm là $y=4m^2-11m$.

(P) và (Q) đều lõm nên hai phương trình có nghiệm xen kẽ $\Leftrightarrow$ Tung độ giao điểm của (P) và (Q) có giá trị âm $\Leftrightarrow h(2m) < 0 \Leftrightarrow 4m^2 - 11m < 0$

$\Leftrightarrow 0 <m < \dfrac{11}{4}$.(H. 10)



Hình 10

2) Gọi $f_1(x)=x^2 + x + m - 2$; $g_1(x)=x^2 - x + 2m$. Rõ ràng $f_1(x)= g_1(x) + 2x - m - 2$

Lại gọi $x_{1,2}$ là các nghiệm (nếu có) của $g_1(x) \Rightarrow f_1(x_{1,2})=2x_{1,2}-m-2$.

Ký hiệu $\Pi=f_1(x_1)f_1(x_2)$.

• Hai phương trình có nghiệm xen kẽ khi và chỉ khi phương trình $g_1(x) = 0$ có hai nghiệm phân biệt $x_1; x_2$ thoả mãn $H = f_1(x_1)f_1(x_2) < 0$.

+ Phương trình (1) có 2 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta_f = 1 - 8m > 0 \Leftrightarrow m < \frac{1}{8}$. (3)

+ $H = (2x_1 - m - 2)(2x_2 - m - 2) = 4x_1x_2 - 2(m+2)(x_1 + x_2) + (m+2)^2$ (4)

Theo Vi-et $x_1x_2 = 2m$; $x_1 + x_2 = 1$, thay vào (4) có $H = m^2 + 10m$.

Bởi thế $H < 0 \Leftrightarrow m^2 + 10m < 0 \Leftrightarrow -10 < m < 0$ (5)

• Từ (3), (5) kết luận : Tập hợp các giá trị phải tìm của m là $-10 < m < 0$

Thí dụ 9.

1. Tìm a để phương trình $x^2 + 4x - 2|x - a| + 2 - a = 0$ có đúng 2 nghiệm phân biệt
2. Tìm a để phương trình $x|x + 2a| + 1 - a = 0$ có 1 nghiệm duy nhất.

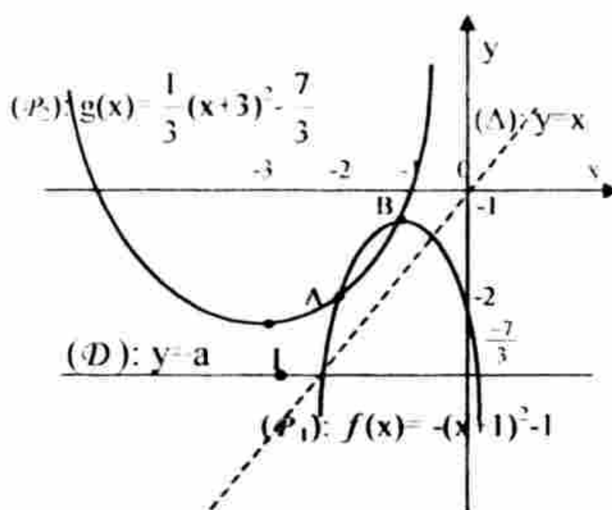
Lời giải

1) $x^2 + 4x - 2|x - a| + 2 - a = 0$ (1)

Tập xác định : R

$$(1) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x^2 + 2x + 2 + a = 0 \\ x \geq a \end{cases} \\ \begin{cases} \dfrac{x^2}{3} + 2x + \dfrac{2}{3} - a = 0 \\ x < a \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} (3)\begin{cases} -(x+1)^2 - 1 = a \quad (\mathcal{P}_1) \\ x \geq a \end{cases} \\ (4)\begin{cases} \dfrac{1}{3}(x+3)^2 - \dfrac{7}{3} = a \quad (\mathcal{P}_2) \\ x < a \end{cases} \end{array}\right.$$



Hình 11

Vẽ các đường thẳng $(\mathcal{D})$: y=a; (Δ): y=x và các parabol

$(\mathcal{P}_1)$ $y = f(x) = -(x+1)^2 - 1$; $(\mathcal{P}_2)$: $y = g(x) = \frac{1}{3}(x+3)^2 - \frac{7}{3}$.

Chú ý : Gọi $I = (\mathcal{D}) \cap (\Delta)$. Xét điểm $M(x; a) \in (\mathcal{D})$ sẽ có :

*+ **M** nằm phía trái điểm I $\Leftrightarrow x < a$ $\Leftrightarrow$ **M ở trên (Δ).***

*+ **M** nằm phía phải điểm I $\Leftrightarrow x > a$ $\Leftrightarrow$ **M ở dưới (Δ).***

Bởi vậy :

Số nghiệm của (3) bằng số giao điểm của $(\mathcal{D})$ với **phần của $(\mathcal{P}_1)$ ở không trên(Δ).**

Số nghiệm của (4) bằng số giao điểm của $(\mathcal{D})$ với **phần của $(\mathcal{P}_2)$ ở trên (Δ).**

Thấy rằng $(\mathcal{P}_1) \cap (\mathcal{P}_2) = \{A; B\}$, trong đó $A = (-2; -2)$, $B = (-1; -1)$.

Căn cứ vào đồ thị suy ra phương trình có đúng hai nghiệm phân biệt khi và chỉ khi $a < -\frac{7}{3}$ hoặc $a \geq -2$.

2) $x|x + 2a| + 1 - a = 0$ (1)

Tập xác định R.

Ta có (1) $\Leftrightarrow \left[\begin{cases} x^2 + 2ax + 1 - a = 0 \\ x > -2a \end{cases} \\ \begin{cases} -x^2 - 2ax + 1 - a = 0 \\ x < -2a \end{cases}\right.$ Gọi $f(x) = x|x + 2a| + 1 - a$;

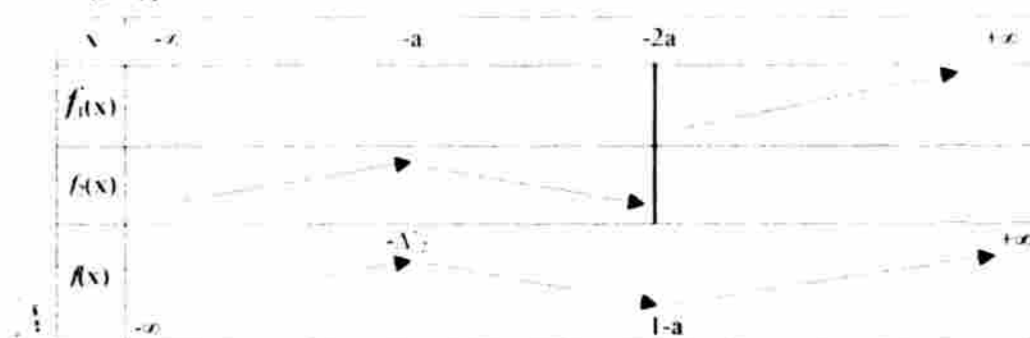
$f_1(x)=x^2+2ax+1-a$; $f_2(x)=-x^2-2ax+1-a$; $\Delta'_1=a^2+a-1$, $\Delta'_1=0 \Leftrightarrow a = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$.

$\Delta'_2=a^2-a+1$, $\Delta'_2>0$, với $\forall a \in R$. Ta có $f(-2a)=f_1(-2a)= f_2(-2a)=1-a$

Hoành độ đỉnh của các parabol (P_1) : $y= f_1(x)$, (P_2) : $y=f_2(x)$ đều bằng $-a$.

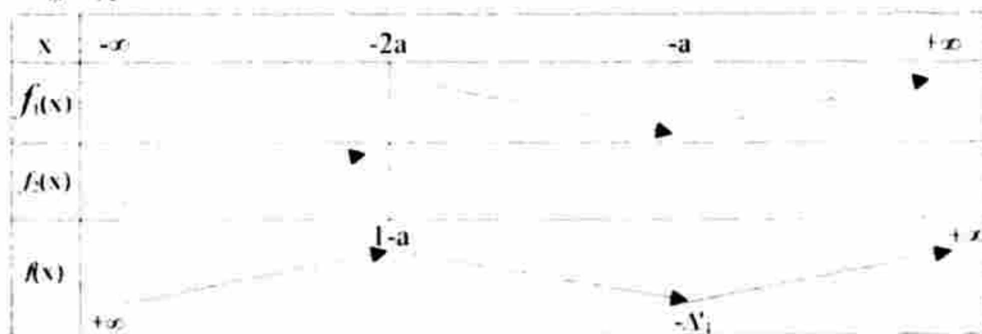
Ta có bảng biến thiên của các hàm số $f(x)$, $f_1(x)$, $f_2(x)$ trong từng trường hợp như sau:

• *Trường hợp 1.* $a<0 \Rightarrow -a<-2a$



Từ $a < 0 \Rightarrow 1 - a > 0$. Bảng biến thiên cho thấy phương trình luôn có một nghiệm duy nhất suy ra $a<0$ thích hợp với yêu cầu bài toán . (2)

• *Trường hợp 2.* $a > 0 \Rightarrow -2a < -a$.



bảng biến thiên cho thấy phương trình có một nghiệm duy nhất

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 1 - a < 0 \\ -\Delta'_1 > 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a > 1 \\ 0 < a < \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \end{array}\right. \quad (3)$$

• *Trường hợp 3.* $a = 0$, $f(x) = x|x| + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -1$

$\Rightarrow$ a=0 là một giá trị phải tìm. (4)

Từ (2), (3), (4) suy ra : Tập hợp các giá trị phải tìm của m là

$$\left[\begin{array}{l} a > 1 \\ 0 \le a < \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \end{array}\right.$$

Thí dụ 10.

Chứng tỏ tập hợp A có phần tử cố định với mọi m. Tìm m để A có đúng 2 phần tử. Với :

a) $A=\{x\in R|x^3-mx+1-m=0\}$

b) $A=\{x\in R|x^3-(m+1)x^2+(m^2-m-3)x-m^2+2m+3=0\}$

Trong bài toán này hiểu đối tượng tập hợp là các số thực.

Hai phần tử khác nhau nếu và chỉ nếu các số biểu thị chúng khác nhau.

Lời giải

a) Viết lại : $x^3-mx+1-m=0 \Leftrightarrow x^3+1-m(x+1)=0$ (1)

• Tập hợp A có phần tử cố định với mọi m <=> Phương trình (1) có nghiệm không phụ thuộc m. Điều đó xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} x+1=0 \\ x^3+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=-1$

Vậy khi m thay đổi, tập hợp A luôn có một phần tử cố định là $x=-1$

Từ kết quả trên suy ra $(1) \Leftrightarrow (x+1)(x^2-x+1-m)=0$. Gọi $f(x)=x^2-x+1-m$.

• A có đúng 2 phần tử khi và chỉ khi tập nghiệm của phương trình (1) có đúng 2 giá trị. Điều đó đạt được khi và chỉ khi $f(x)=0$ có các nghiệm $x_{1,2}$ thoả mãn một trong hai trường hợp sau đây :

Trường hợp 1: $-1=x_1\neq x_2 \Leftrightarrow \begin{cases} f(-1)=0 \\ \dfrac{c}{a}\neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3-m=0 \\ 1-m\neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow m=3$ (2)

Trường hợp 1: $-1\neq x_1=x_2 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta_f=0 \\ -\dfrac{b}{2a}\neq -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4m-3=0 \\ \dfrac{1}{2}\neq -1 \end{cases} \Leftrightarrow m=\dfrac{3}{4}$ (3)

Từ (2), (3) => Tập hợp các giá trị phải tìm của m là $m=3$ và $m=\dfrac{3}{4}$.

b) Xem phương trình $x^3-(m+1)x^2+(m^2-m-3)x-m^2+2m+3=0$ (4)

$\Leftrightarrow (x-1)m^2-(x^2+x-2)m+x^3-x^2-3x+3=0$.

Xét hệ $\begin{cases} x-1=0 \\ x^2+x-2=0 \\ x^3-x^2-3x+3=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=1$

Suy ra phương trình (4) có nghiệm $x=1$ không phụ thuộc m <=> Tập hợp A có một phần tử cố định ($x=1$) với mọi m. (đpcm)

Từ kết quả đó suy ra : $(4) \Leftrightarrow (x-1)(x^2-mx+m^2-2m-3)=0$

Gọi $f(x)=x^2-mx+m^2-2m-3$.

• A có đúng 2 phần tử khi và chỉ khi tập nghiệm của phương trình (4) có đúng 2 giá trị. Điều ấy đạt được khi và chỉ khi xảy ra một trong hai trường hợp sau:

Trường hợp 1. $\begin{cases} f(1)=0 \\ \dfrac{c}{a}\neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2-3m-2=0 \\ m^2-2m-4\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m=\dfrac{3\pm\sqrt{17}}{2}$ (5)

Trường hợp 2. $\begin{cases}\Delta_1 = 0\\ -\dfrac{b}{2a} \neq 1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}-3m^2 + 8m + 12 = 0\\ m \neq 2\end{cases} \Leftrightarrow m = \dfrac{2 \pm \sqrt{13}}{3}$ (6)

Từ (5), (6) suy ra tập hợp các giá trị phải tìm của m là:

$$\left\{m = \frac{3 \pm \sqrt{17}}{2};\ m = \frac{2 \pm \sqrt{13}}{3}\right\}$$

Thí dụ 11.

Tìm a để phương trình $(a + 1)x^2 - (8a + 1)x + 6a = 0$ có đúng 1 nghiệm thuộc khoảng (0; 1)

Lời giải

• ***Trường hợp*** **1:** $a+1=0 \Leftrightarrow a=-1$, Phương trình đã cho trở thành $7x - 6 = 0$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{6}{7} \in (0;\ 1) \Rightarrow a = -1$ là giá trị phải phải tìm. (1)

• ***Trường hợp*** **2 :** $a \neq -1$, ta có $f(0).f(1) = -6a^2 < 0\ \forall a$

+ a=0, phương trình đã cho trở thành $x^2 - x = 0 \Leftrightarrow \{x=0;\ x=1\}$

$\Rightarrow$ a=0 không phải là giá trị phải tìm. (2)

+ $a \neq 0 \Rightarrow f(0).f(1) < 0 \Rightarrow$ Phương trình đã cho có đúng một nghiệm thuộc khoảng (0; 1) (3)

Từ (1), (2), (3) suy ra phương trình đã cho có đúng một nghiệm (0; 1) khi và chỉ khi $a \neq 0$

Thí dụ 12.

Cho $m \geq -1$. Tìm nghiệm lớn của phương trình $x^2+(2m-6)x+m-11=0$ (1)

Lời giải

Viết lại $(1) \Leftrightarrow m(2x + 1) + x^2 - 6x - 11 = 0 \Leftrightarrow (m+1)(2x+1)+x^2-8x-12=0$ (1')

Thấy rằng $x = -\dfrac{1}{2}$ không phải là nghiệm của phương trình (1).

Chia hai vế của phương trình (1') cho $2x+1$ ta có

$(1') \Leftrightarrow m + 1 = \dfrac{-x^2 + 8x + 12}{2x + 1}$. Bởi thế: $m \geq -1 \Leftrightarrow m+1 \geq 0$

$$\Leftrightarrow \frac{-x^2 + 8x + 12}{2x + 1} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{(x - 4 + 2\sqrt{7})(x - 4 - 2\sqrt{7})}{2x + 1} \leq 0 \quad (2)$$

Dấu vế trái (VT) của (2) :

$4 - 2\sqrt{7}$ $-\dfrac{1}{2}$ $4 + 2\sqrt{7}$ x

−   +   −   +

Căn cứ vào dấu VT(2) suy ra tập nghiệm của bất phương trình (2) là

$$x \in (-\infty;\ 4 - 2\sqrt{7}] \cup \left(-\frac{1}{2};\ 4 + 2\sqrt{7}\right] \quad (3)$$

Gọi x_0 là nghiệm của phương trình (1) với $m > -1$.

Từ (3) suy ra $\max\limits_{m>-1}(x_0) = 4 + \sqrt{7}$. Nói khác đi, với $m > -1$, nghiệm lớn nhất có thể của phương trình (1) là $x = 4 + \sqrt{7}$.

BÀI TẬP

Bài 1. Chứng minh tập hợp nghiệm của tập hợp các phương trình sau đây khác rỗng :

1) Hai phương trình : $x^2+ax+b=0$; $x^2+bx+a=0$ trong đó a, b là các số thực thoả mãn : $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{2}$

2) Ba phương trình : $x^2+ax+b-1=0$; $x^2+bx+c-1=0$; $x^2+cx+a-1=0$ trong đó a, b, c là các số thực bất kỳ.

Bài 2. Cho tập hợp $A=\{x \in R | x^3-(m^2-m+7)x-3(m^2-m-2)=0\}$

1) Chứng tỏ tập hợp A có phần tử cố định với mọi m.

Tìm m để A có đúng 2 phần tử.

2) Tìm hệ thức độc lập với tham số liên hệ giữa các phần tử không cố định của A.

(Trong bài toán này hiểu đối tượng tập hợp là các số thực. Hai phần tử khác nhau nếu và chỉ nếu các số biểu thị chúng khác nhau.)

Bài 3. Tìm m biết rằng phương trình $x^2 + 2mx + 2m^2 - 1 = 0$ có hai nghiệm thoả mãn

$$|x_1| < 1 < |x_2|$$

Chương III.

TAM THỨC BẬC HAI

§1. KIẾN THỨC CƠ BẢN VỀ TAM THỨC BẬC HAI

$f(x)= ax^2+bx+c \quad (a\neq 0)$

$\Delta=b^2-4ac$

Kí hiệu x_1, x_2 là các nghiệm của $f(x) = 0$

1. *Định lý thuận*

- $\Delta < 0$: $a.f(x) > 0, \forall x \in R$
- $\Delta = 0$: $a.f(x) > 0, \forall x \neq -\dfrac{b}{2a}$
- $\Delta > 0$: $\begin{cases} a.f(x) > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x < x_1 \\ x > x_2 \end{array}\right. \\ a.f(x) < 0 \Leftrightarrow x_1 < x < x_2 \end{cases}$

2. *Định lý đảo*

- $a.f(\alpha)<0 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ x_1 < \alpha < x_2 \end{cases}$
- $\begin{cases} a.f(\alpha) > 0 \\ \Delta > 0 \end{cases} \Rightarrow \alpha \notin [x_1; x_2]: \begin{cases} \alpha < x_1 < x_2 & \textit{nếu } \dfrac{S}{2} > \alpha \\ x_1 < x_2 < \alpha & \textit{nếu } \dfrac{S}{2} < \alpha \end{cases}$
- $a.f(\alpha)=0 \Rightarrow \alpha$ là một nghiệm của $f(x)$

3. *Định lý Viète*: • $\Delta > 0 \Rightarrow \begin{cases} S = x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a} \\ P = x_1x_2 = \dfrac{c}{a} \end{cases}$

§2. NHỮNG BÀI TOÁN VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI

Bài toán 1. Giải bất phương trình bậc hai

Thí dụ 1.

Tìm m để phương trình sau có nghiệm : $(m-2)x^2+2(2m-3)x+5m-6=0$ (1)

Lời giải

• *Trường hợp 1* : $m = 2$. Ta có (1) <=> $x = -2$ => $m = 2$ là một giá trị phải tìm (2)

• *Trường hợp 2* : $m \neq 2$. Ta có : $\Delta' = (2m-3)^2-(m-2)(5m-6) = -m^2+4m-3$

Phương trình (1) có nghiệm <=> $\Delta' \geq 0$ <=> $-m^2+4m-3 \geq 0$ <=> $\left[\begin{array}{l}1 \leq m < 2 \\ 2 < m \leq 3\end{array}\right.$ (3)

Từ (2), (3) suy ra tập hợp các giá trị phải tìm của m là $1 \leq m \leq 3$

Chú ý *Khi a (hệ số của x^2) chứa tham số, phương trình có* "dạng bậc hai", *bạn phải kiểm tra trường hợp $a = 0$*

Thí dụ 2. Giải bất phương trình : $\dfrac{2+7x-15x^2}{2-7x+3x^2} > 0$ (1)

Lời giải

Gọi $f(x) = 2+7x-15x^2$; $f(x) = 0$ <=> $\{x = -\frac{1}{5} ; x = \frac{2}{3}\}$

Gọi $g(x) = 2-7x+3x^2$; $g(x)=0$ <=> $\{x=\frac{1}{3} ; x=2\}$. Ta có bảng sau :

x	$-\infty$		$-\frac{1}{5}$		$\frac{1}{3}$		$\frac{2}{3}$		2		$+\infty$
f(x)		−	0	+		+	0	−		−	
g(x)		+		+	0	−		−	0	+	
$\frac{f(x)}{g(x)}$		−		+	‖	−		+	‖	−	

Căn cứ vào xét dấu trên suy ra tập nghiệm của bất phương trình (1) là

$$\left\{-\frac{1}{5} < x < \frac{1}{3} ; \frac{2}{3} < x < 2\right\}$$

Thí dụ 3.

Giải bất phương trình : $3x^2-6x+5+\dfrac{2x-3}{x^2-3x+3} > 0$ (1)

Lời giải

Viết lại $(1) \Leftrightarrow 3(x-1)^2+\left(2+\dfrac{2x-3}{x^2-3x+3}\right)>0 \Leftrightarrow 3(x-1)^2+\dfrac{2x^2-4x+3}{x^2-3x+3}>0$

$\Leftrightarrow 3(x-1)^2+\dfrac{2(x-1)^2+1}{x^2-3x+3}>0$ ể ý $3x^2-3x+3>0\ \forall x\in R$ (do $\Delta<0$)

$\Rightarrow$ Bất phương trình (1) có tập nghiệm là R.

Thí dụ 4.

Tìm m để phương trình sau có các nghiệm trái dấu :

$(m^2-1)x^2+(m+1)x-m^2+2m+3=0$ (1)

Lời giải

Viết lại $(1) \Leftrightarrow (m+1)[(m-1)x^2+x-(m-3)]=0$ (2)

Trường hợp 1a : $m=-1$, Phương trình (2) $\Leftrightarrow$ $0x=0$, đúng $\forall x\in R$

$\Rightarrow$ (1) có vô số nghiệm trái dấu $\Rightarrow$ $m=-1$ là một giá trị phải tìm. (3)

Trường hợp 1b: $m=1$, Phương trình (2) $\Leftrightarrow$ $x+2=0$ $\Leftrightarrow x=-2$.

$\Rightarrow m=1$ không phải là giá trị phải tìm. (4)

Trường hợp 2: $-1\neq m\neq 1$, gọi $f(x)=(m-1)x^2+x-(m-3)$.

Phương trình (1) có các nghiệm trái dấu $\Leftrightarrow ac<0$

$$\Leftrightarrow -(m-1)(m-3)<0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}-1\neq m<1\\ m>3\end{array}\right. \quad (5)$$

Từ (3), (4) và (5) suy ra : Tập hợp các giá trị phải tìm của m là $\left[\begin{array}{l}m<1\\ m>3\end{array}\right.$.

Thí dụ 5.

Giải bất phương trình : $\dfrac{x}{x^2-x+1}-\dfrac{x}{x^2+x+1}>\dfrac{2}{3}$ (1)

Lời giải

$(1) \Leftrightarrow x[(x^2+x+1)-(x^2-x+1)]\geq\dfrac{2}{3}(x^2-x+1)(x^2+x+1) \Leftrightarrow 2x^2\geq\dfrac{2}{3}[(x^2+1)^2-x^2]$

$\Leftrightarrow 3x^2\geq x^4+x^2+1 \Leftrightarrow (x^2-1)^2<0 \Leftrightarrow x=\pm1$

Thí dụ 6.

Giải bất phương trình $(2-7x+3x^2)\sqrt{3-5x-2x^2}\geq0$ (1)

Lời giải

$$(1)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}3-5x-2x^2=0\\ \begin{cases}3-5x-2x^2>0\\ 2-7x+3x^2>0\end{cases}\end{array}\right.$$

$$(2) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left\{x=-3; x=\frac{1}{2}\right\} \\ \left\{\begin{array}{l} -3<x<\frac{1}{2} \\ \left[\begin{array}{l} x<\frac{1}{3} \\ x\ge 2 \end{array}\right. \end{array}\right. \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -3\le x<\frac{1}{3} \\ x=\frac{1}{2} \end{array}\right.$$

Chú ý. Bất phương trình trên thuộc dạng $f(x)\sqrt{g(x)}\ge 0$.

Gọi tập xác định của $f(x)$ là D_f. Ta có:

$$f(x)\sqrt{g(x)}\ge 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} x\in D_f \\ g(x)=0 \end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{l} g(x)>0 \\ f(x)\ge 0 \end{array}\right. \end{array}\right. .$$

> **Thí dụ 7.**
> Với mỗi $a\ge 0$, giải bất phương trình $a^3x^4+6a^2x^2-x+9a+3\ge 0$ (1)

Lời giải

- $a=0$. Ta có (1) $\Leftrightarrow x\le 3$ (2)
- $a>0$. Nhân hai vế với a có (1) $\Leftrightarrow a^4x^4+6a^3x^2-ax+9a^2+3a\ge 0$ (3)

Đặt $t=ax$, phương trình (3) trở thành $t^4+6at^2-t+9a^2+3a\ge 0$

$\Leftrightarrow 9a^2+3(2t^2+1)a+t^4-t\ge 0$ (4)

$\Delta_a=9(2t^2+1)^2-4.9(t^4-t)=9(4t^2+4t+1)=9(2t+1)^2$

$$VP(4)=0 \Leftrightarrow a=\frac{-3(2t^2+1)\pm 3(2t+1)}{18} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a_1=\frac{t^2+t+1}{-3} \\ a_2=\frac{-t^2+t}{3} \end{array}\right. \text{ Suy ra :}$$

$$VP(4)=9(a-a_1)(a-a_2)=9\left(a+\frac{t^2+t+1}{3}\right)\left(a-\frac{-t^2+t}{3}\right)=(t^2+t+1+3a)(t^2-t+3a)$$

Suy ra: (4) $\Leftrightarrow (t^2+t+1+3a)(t^2-t+3a)\ge 0$

$\Leftrightarrow (t^2+t+1+3a)(t^2-t+3a)\ge 0$ (5)

Để ý : $t^2+t+1+3a=\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}+3a>0, \forall a>0$. **Bởi vậy :**

(5) $\Leftrightarrow t^2-t+3a\ge 0 \Leftrightarrow a(ax^2-x+3)\ge 0 \Leftrightarrow ax^2-x+3\ge 0.$ (6)

$\Delta_x=1-12a\le 0 \Leftrightarrow a\ge\frac{1}{12}$.

Các nghiệm nếu có của phương trình $ax^2-x+3=0$ là $x_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{1-12a}}{2}$

Suy ra : $\left[\begin{array}{l} a \geq \frac{1}{12} (\Delta \leq 0), \text{ sẽ có (6) nghiệm } \forall x \in R \\ 0 < a < \frac{1}{12} (\Delta > 0), \text{ sẽ có (6)} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \leq \frac{1 - \sqrt{1 - 12a}}{2} \\ x \geq \frac{1 + \sqrt{1 - 12a}}{2} \end{array}\right. \end{array}\right.$

Tóm lại: • $a = 0$: Bất phương trình có tập nghiệm là : $x \leq 3$

• $0 < a \leq \frac{1}{12}$: Bất phương trình có tập nghiệm là : $\left[\begin{array}{l} x < \frac{1 - \sqrt{1 - 12a}}{2} \\ x \geq \frac{1 + \sqrt{1 - 12a}}{2} \end{array}\right.$

• $a \geq \frac{1}{12}$: Bất phương trình có tập nghiệm là R.

Thí dụ 8.

Tìm p để bất phương trình sau có nghiệm : $\frac{4x^2}{1 + 2x^2 + x^4} + \frac{2px}{1 + x^2} + 1 - p^2 > 0$ (1)

Lời giải

Đặt $t = \frac{2x}{1 + x^2}$, $|t| \leq 1$. Bất phương trình trở thành *f*(t): $t^2 + pt + 1 - p^2 > 0$ (2)

Bất phương trình (1) có nghiệm $\Leftrightarrow$ Bất phương trình (2) có nghiệm $|t| \leq 1$.

• *Ta giải toán bằng phương pháp gián tiếp .*

Do a = 1 > 0, nên bất phương trình (2) vô nghiệm trên $[-1; 1] \Leftrightarrow f(t) < 0, \forall t \in [-1; 1]$

$\Leftrightarrow \begin{cases} f(-1) < 0 \\ f(1) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 - p - p^2 < 0 \\ 2 + p - p^2 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p \in (-\infty, -2) \cup (1, +\infty) \\ p \in (-\infty, -1) \cup (2, +\infty) \end{cases} \Leftrightarrow |p| > 2.$ (3)

• Từ (3) suy ra phương trình (1) có nghiệm khi và chỉ khi $|p| \leq 2$

Vậy $|p| \leq 2$ là tập hợp các giá trị của p để bất phương trình có nghiệm.

Thí dụ 9.

Khi $m \leq 2$, tìm nghiệm lớn nhất (*có thể*) của phương trình

$$(m - 2)x^2 + 2(4 - 3m)x + 10m - 11 = 0$$

Lời giải

Viết lại $(m - 2)x^2 + 2(4 - 3m)x + 10m - 11 = 0 \Leftrightarrow m(x^2 - 6x + 10) = 2x^2 - 8x + 11$ (1)

Thấy rằng $x^2 - 6x + 10 = (x - 3)^2 + 1 \geq 1, \forall x \in R$ nên (1) $\Leftrightarrow m = \frac{2x^2 - 8x + 11}{x^2 - 6x + 10}$

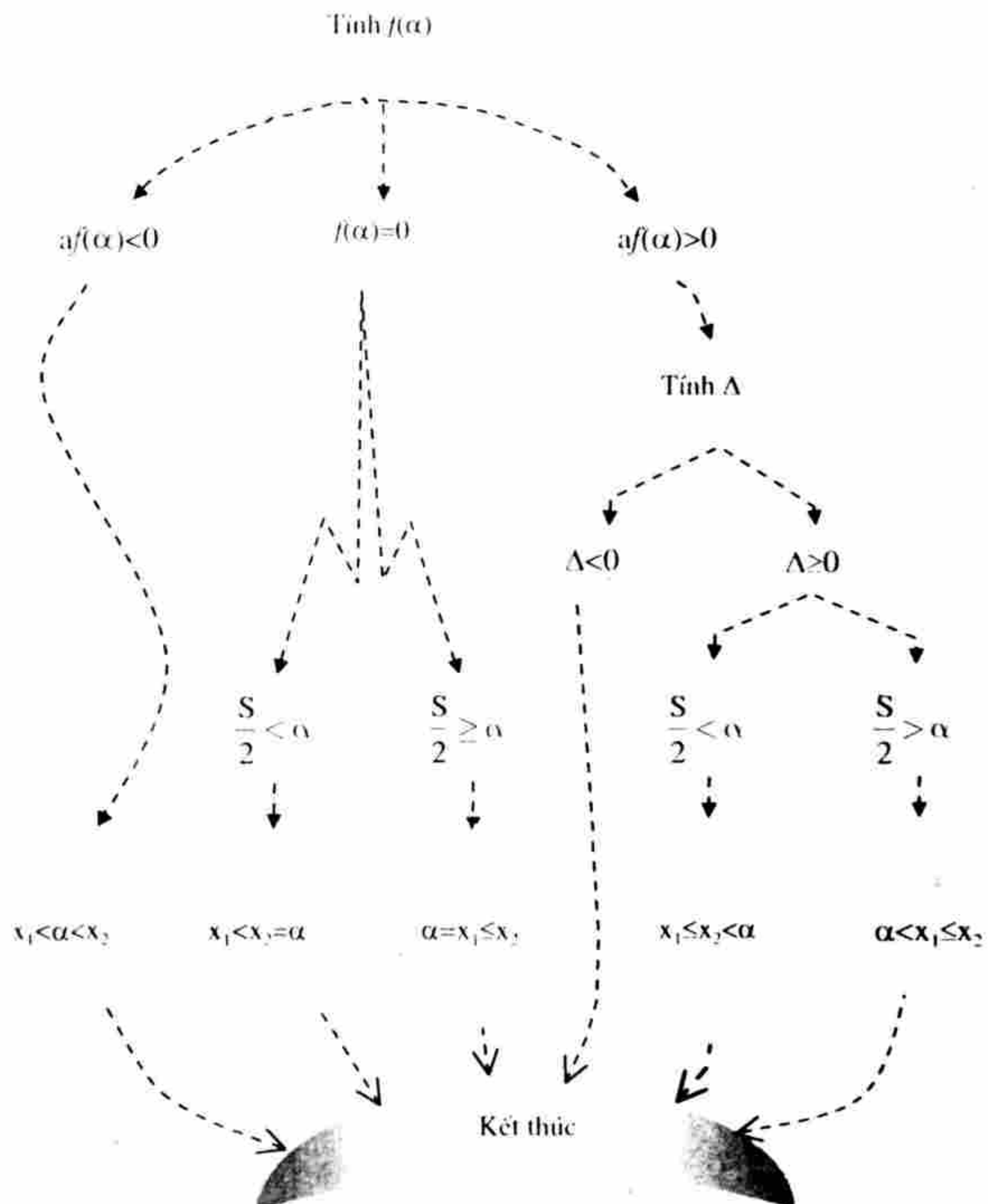
Bởi vậy $m \leq 2 \Leftrightarrow \frac{2x^2 - 8x + 11}{x^2 - 6x + 10} \leq 2 \Leftrightarrow \frac{2x^2 - 8x + 11}{x^2 - 6x + 10} - 2 \leq 0$

$$\Leftrightarrow \frac{2x^2 - 8x + 11 - 2(x^2 - 6x + 10)}{x^2 - 6x + 10} < 0 \Leftrightarrow \frac{4(x - 5)}{x^2 - 6x + 10} < 0 \Leftrightarrow x < 5.$$

Vậy nghiệm lớn nhất có thể của phương trình khi $m < 2$ là $x = 5$.

Bài toán 2. So sánh nghiệm với một số cho trước

Muốn so sánh số thực α với nghiệm của phương trình bậc hai $f(x) = ax^2 + bx + c = 0$, ta thực hiện theo trình tự sau đây:



Thí dụ 10.
So sánh 1 với nghiệm của phương trình $2x^2 - 18x + 17 = 0$

Lời giải

Ta có $\begin{cases} 2f(1) = 2 > 0 & (1) \\ \Delta' = 47 > 0 & (2) \\ \dfrac{S}{2} = \dfrac{9}{2} > 1 & (3) \end{cases}$ $\Rightarrow$ Phương trình có 2 nghiệm x_1, x_2: $1 < x_1 < x_2$

Chú ý: *Phép (2) và (3) sẽ được thay thế đơn giản hơn nếu so sánh được 1 với một số nào đó ở trong khoảng hai nghiệm.*

Chẳng hạn: Từ $\begin{cases} 2f(3) = -38 < 0 \\ 1 < 3 \end{cases}$ $\Rightarrow 1 < x_1 < 3 < x_2$

Thí dụ 11
So sánh –2 với nghiệm của phương trình
$f(x) = (m^2 + 1)x^2 - 5(m^2 + 1)x - m^2 + m - 1 = 0$ (1)

Lời giải

Viết lại (1) $\Leftrightarrow x^2 - 5x + \dfrac{m}{1 + m^2} - 1 = 0$. Gọi $f(x) = x^2 - 5x + \dfrac{m}{1 + m^2} - 1$

Để ý : $\forall m$ luôn có $\left|\dfrac{m}{1 + m^2}\right| \le \dfrac{1}{2} \Rightarrow -\dfrac{1}{2} \le \dfrac{m}{1 + m^2} \le \dfrac{1}{2}$

$$\Rightarrow \begin{cases} ac = \dfrac{m}{1 + m^2} - 1 \le \dfrac{1}{2} - 1 = -\dfrac{1}{2} < 0 \\ f(-2) = 13 + \dfrac{m}{1 + m^2} \ge 13 - \dfrac{1}{2} = \dfrac{25}{2} > 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 và $-2 < x_1 < 0 < x_2$

Thí dụ 12 (Học sinh giỏi miền Bắc, 1968)
Cho hai số a và b thoả mãn điều kiện $a \ge b > 0$, $a + b = 1$. Chứng minh phương trình $x^2 - b^n x - a^n = 0$ luôn có hai nghiệm phân biệt thuộc $(-1; 1)$

Lời giải

Từ giả thiết $a \ge b > 0$ và $a + b = 1$ suy ra

$$\begin{cases} a \in (0; 1) \\ b \in (0; 1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 < a^n < 1 \\ 0 < b^n < 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 < 1 - a^n < 1 \\ 0 < 1 - b^n < 1 \end{cases} \text{ và } \begin{cases} a > a^n \\ b > b^n \end{cases} \quad (1)$$

Gọi $f(x) = x^2 - b^n x - a^n$. Ta có
Hệ số của x^2 là dương 1 và (2)

$f(0) = -a^n < 0, \forall$ (3)

$f(1) = 1 - b^n - a^n = (a + b) - b^n - a^n = (a - a^n) + (b - b^n) > 0$ (4)

$f(-1) = 1 + b^n - a^n = (1 - a^n) + b^n > 0$ (5)

Từ (2), (3), (4), (5) suy ra $f(x)=0$ luôn có **hai nghiệm phân biệt** : x_1; x_2 thoả mãn $-1 < x_1 < 0 < x_2 < 1$ (đpcm)

Bài toán 3. Giải và biện luận phương trình $f(m, x) = 0$

($f(m, x)=0$ là phương trình bậc hai chứa tham số m.)

CÁCH GIẢI

Lập bảng xét dấu như sau (α, β là các số phải so sánh với nghiệm)

m	a	Δ	$f(\alpha)$	$\frac{S}{2}-\alpha$	$f(\beta)$	$\frac{S}{2}-\beta$	Nghiệm của phương trình Kết quả của bài toán

Thí dụ 13.

Giải và biện luận phương trình $\frac{1}{\sqrt{x^2 + 2mx}} = \frac{1}{\sqrt{8x - 6m - 3}}$ (1)

Lời giải

Ta có

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 2mx = 8x - 6m - 3 \\ 8x - 6m - 3 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 2(m-4)x + 6m + 3 = 0 \quad (2) \\ x > \frac{6m+3}{8} \end{cases}$$

Gọi $f(x) = x^2 + 2(m - 4)x + 6m + 3$ và $\alpha = \frac{6m+3}{8}$

Bài toán dẫn tới tìm nghiệm của phương trình (2) thoả mãn điều kiện $x>\alpha$

Tính : $\Delta' = (m-1)(m-13)$; $f(\alpha) = \frac{33}{16}(m + \frac{1}{2})(m + \frac{3}{22})$; $\frac{S}{2} - \alpha = \frac{29 - 14m}{8}$.

Các nghiệm (*nếu có*) của phương trình (2) là $x_{1,2} = 4 - m \pm \sqrt{\Delta}$

Ta có bảng

m	Δ $(m-1)(m-13)$	$f(\alpha)$ $\frac{33}{16}(m+\frac{1}{2})(m+\frac{3}{22})$	$\frac{S}{2}-\alpha$ $\frac{29-14m}{8}$	So sánh nghiệm Kết quả được đóng khung
$-\infty$				
	+	+	+	$\alpha < \boxed{x_1} < \boxed{x_2}$
$\frac{-1}{2}$		0		$0=\alpha=x_1 < \boxed{x_2=9}$
	+	−	+	$x_1 < \alpha < \boxed{x_2}$
$\frac{-3}{22}$		0		$\frac{3}{11}=\alpha=x_1 < \boxed{x_2=8}$
	+	+	+	$\alpha < \boxed{x_1} < \boxed{x_2}$
1	0			$\frac{9}{8}=\alpha < \boxed{x_1=x_2=3}$
	-	+	+	
$\frac{29}{14}$			0	$f(x)=0$ vô nghiệm
	−	+	−	
13	0			
	+	+	-	$x_1 \le x_2 < \alpha$
$+\infty$				

Tóm lại :

- $\left[\begin{array}{l} m < -\frac{1}{2} \\ -\frac{3}{22} < m < 1 \end{array}\right.$ **Phương trình (1) có hai nghiệm $x_{1,2} = 4 - m \pm \sqrt{\Delta}$**
- $-\frac{1}{2} \le m \le -\frac{3}{22}$ **Phương trình (1) có một nghiệm : $x_2 = 4 - m + \sqrt{\Delta}$**
- $m = 1$ **Phương trình (1) có nghiệm kép $x_1 = x_2 = 3$**
- $m > 1$ **Phương trình (1) vô nghiệm**

Bài toán 4. Tìm m để $af(m, x) \geq 0, \forall x \in R$ *(Đồng dấu trên toàn trục)*

CÁCH GIẢI: $a.f(m, x) \geq 0 \ \forall x \in R \Leftrightarrow \Delta \leq 0$

Thí dụ 14

Cho $f(x)=(1-\frac{m^2}{4})x^2-(m+2)x+1$. Tìm m để $Q(x)=\frac{10+x}{\sqrt{f(x)}}$ xác định $\forall x \in R$

Lời giải

Cách 1: $Q(x)$ xác định $\forall x \in R \Leftrightarrow f(x) > 0, \forall x \in R$ (*)

- Trường hợp 1: $1-\frac{m^2}{4}=0 \Leftrightarrow m = \pm 2$

  + $m = -2$, $f(x)=1>0, \forall x \in R \Rightarrow m = -2$ là một giá trị phải tìm. (1)

  + $m = 2$, $f(x) = -4x + 1$; $f(x) > 0 \Leftrightarrow 1-4x > 0 \Leftrightarrow x < \frac{1}{4}$

  $\Rightarrow m = 2$ không thích hợp (2)

- Trường hợp 2: $m \neq \pm 2$, $f(x)>0, \forall x \in R \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta < 0 \end{cases}$ (3)

  + $a = 1-\frac{m^2}{4}>0 \Leftrightarrow 4-m^2>0 \Leftrightarrow -2<m<2$ (3.1)

  + $\Delta = (m+2)^2-(4-m^2) = 2m(m+2)$. $\Delta<0 \Leftrightarrow -2<m<0$ (3.2)

Từ (3.1), (3.2) suy ra: (3) $\Leftrightarrow -2 < m < 0$ (4)

Từ (1), (2) và (4) suy ra tập hợp các giá trị phải tìm của m là: $-2 \leq m < 0$

Cách 2. (Tiếp nối từ (*))

+ Rõ ràng khi $x = 0$ có $f(0) = 1 >0 \ \forall m$ (5)

Với $x \neq 0$, $f(x)>0 \Leftrightarrow \frac{f(x)}{x^2}>0 \Leftrightarrow \frac{1}{x^2}-(m+2)\frac{1}{x}+(1-\frac{m^2}{4})>0$

Gọi $h(\frac{1}{x})$ là vế trái của (6). Đó là tam thức bậc hai đối với $\frac{1}{x}$.

- $h(\frac{1}{x})>0, \forall x \neq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \Delta < 0 \\ b = c = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} (m+2)^2-(4-m^2)<0 \\ m+2 = 1-\frac{m^2}{4} = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2m(m+2)<0 \\ m+2 = 0 \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow -2 \leq m<0$ (7)

Từ (5), (7) suy ra tập hợp các giá phải tìm trị của m là $-2 \leq m<0$

Lời bình.

Trong bài toán tìm $f(x) > 0 \forall x \in R$ nếu $c > 0$, ta có thể chuyển đổi hệ số a và c.
Với cách ấy, bạn không phải biện luận hệ số a.
Bạn cần biết $ax^2 + bx + c = 0$ và $cx^2 + bx + a = 0$ có cùng một biệt thức.

Thí dụ 15

Với những giá trị nào của m thì : $1 < \dfrac{3x^2 - mx + 5}{2x^2 - x + 1} < 6, \forall x \in R$ (1)

Lời giải

Để ý $2x^2 - x + 1 > 0$ do $\begin{cases} a = 2 > 0 \\ \Delta = -9 < 0 \end{cases}$. Bởi vậy, nhân từng vế với $2x^2 - x + 1 > 0$

ta có : (1) $\Leftrightarrow$ $2x^2 - x + 1 < 3x^2 - mx + 5 < 6(2x^2 - x + 1)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 - x + 1 < 3x^2 - mx + 5 \\ 3x^2 - mx + 5 < 6(2x^2 - x + 1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x): x^2 + (1 - m)x + 4 > 0 \\ g(x): 9x^2 - (6 - m)x + 1 > 0 \end{cases} \quad (2)$$

Gọi $\Delta_f = (1-m)^2 - 16$; $\Delta_f < 0 \Leftrightarrow (1-m)^2 < 16 \Leftrightarrow |1-m| < 4 \Leftrightarrow -3 < m < 5$ (3)

Gọi $\Delta_g = (6-m)^2 - 36$; $\Delta_f \le 0 \Leftrightarrow (6-m)^2 \le 36 \Leftrightarrow |6-m| \le 6 \Leftrightarrow 0 \le m \le 12$ (4)

Hệ (1) nghiệm với $\forall x \in R$ $\Leftrightarrow$ hệ (2) nghiệm với $\forall x \in R$ $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta_f < 0 \\ \Delta_g < 0 \end{cases}$ (5)

Từ (3) và (4) suy ra (5) $\Leftrightarrow$ $0 \le m < 5$. Đó là tập hợp các giá trị phải tìm của m.

Bài toán. *(Tích hai tam thức)*

Cho $f(m, x) = (x^2+px+q)(ax^2+bx+c)$ $(a \neq 0)$ phụ thuộc tham số m.

Tìm m để $f(m, x) \geq 0$ $\forall x \in R$

CÁCH GIẢI

Gọi $h(x) = x^2+px+q$, $g(x) = ax^2+bx+c$. Như vậy $f(x) = h(x).g(x)$

- $f(x) \geq 0, \forall x \in R \Leftrightarrow$ h(x) và g(x) không trái dấu với nhau $\forall x \in R$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a > 0 \\ \Delta_f \le 0 \\ \Delta_g \le 0 \end{cases} \\ \dfrac{a}{1} = \dfrac{b}{p} = \dfrac{c}{q} > 0 \quad (*) \end{array} \right.$$

Chú ý : Trong (*) quy ước mẫu thức bằng không thì tử thức cũng bằng không.

Thí dụ 16

Tìm m để $f(x) = (x^2 + x - 1)(x^2 + x + m) \geq 0, \forall x \in R$

Lời giải

Gọi vế trái của (1) là $f(x)$. Thấy rằng $h(x) = x^2 + x - 1$ có hai nghiệm phân biệt không phụ thuộc m . Bởi thế $f(x) \geq 0, \forall x \in R$ $\Leftrightarrow$ Các phương trình $x^2 + x - 1 = 0$ và $x^2 + x + m = 0$ là tương đương $\Leftrightarrow \dfrac{1}{1} = \dfrac{1}{1} = \dfrac{m}{-1} \Leftrightarrow m = -1$

Thí dụ 17

Cho $f(x) = (x^2 - a)^2 - 6x^2 - 4x + 2a$ (1)

1) Với $a = -1$, giải phương trình $f(x) = 0$

2) Tìm a để $f(x) > 0, \forall x \in R$

Lời giải

Viết lại (1) $\Leftrightarrow f_1(a) = a^2 - 2(x^2 - 1)a + x^4 - 6x^2 - 4x$

Xem $f_1(a)$ là biểu thức đối với ẩn a.

$\Delta'_1 = (x^2 - 1)^2 - (x^4 - 6x^2 - 4x) = (2x + 1)^2$, $a_1 = x^2 + 2x$, $a_2 = x^2 - 2x - 2$.

Suy ra $f_1(a) = (a - a_1)(a - a_2) = (a - x^2 - 2x)(a - x^2 + 2x + 2)$

Hay $f(x) = (x^2 - 2x - 2 - a)(x^2 + 2x - a)$.

1) Với $a = -1$ ta có : $f(x) = 0 \Leftrightarrow (x^2 - 2x - 1)(x^2 + 2x + 1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = 1 \pm \sqrt{2} \end{array}\right.$

2) Gọi $h(x) = (x^2 - 2x - 2 - a)$; $g(x) = (x^2 + 2x - a)$.

Thấy rằng $\frac{1}{1} \neq \frac{-2}{2}$. Bởi vậy $f(x) \geq 0, \forall x \in R$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2x - 2 - a \geq 0, \forall x \\ x^2 + 2x - a \geq 0, \forall x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta_1 \leq 0 \\ \Delta_2 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 + a \leq 0 \\ 1 + a \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow 3 + a \leq 0 \Leftrightarrow a \leq -3$$

Thí dụ 18

Tìm m để $Q(x) \geq 0, \forall x \in R$ với

$Q(x) = (1 - \frac{m^2}{9})x^4 + (m + 3)x^3 + (1 + \frac{9}{4} - \frac{m^2}{9})x^2 + (m + 3)x + \frac{9}{4}$ (1)

Lời giải

Cách 1: Viết lại (1) $\Leftrightarrow Q(x) = (x^2 + 1)\left[\left(1 - \frac{m^2}{9}\right)x^2 + (m + 3)x + \frac{9}{4}\right]$

Gọi $f(x) = (1 - \frac{m^2}{9})x^2 + (m + 3)x + \frac{9}{4}$.

Để ý: $x^2 + 1 > 0\ \forall x \in R$ nên $Q(x) \geq 0, \forall x \in R \Leftrightarrow f(x) \geq 0, \forall x \in R$ (*)

Trường hợp 1 : $1 - \frac{m^2}{9} = 0 \Leftrightarrow m = \pm 3$.

+ Với $m = -3$, $f(x) = \frac{9}{4} > 0, \forall x \in R \Rightarrow m = -3$ là một giá trị phải tìm. (2)

+ Với $m = 3$, $f(x) = 6x + \frac{9}{4} \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -\frac{3}{8} \Rightarrow m = 3$ không thích hợp. (3)

Trường hợp 2 : $1 - \frac{m^2}{9} \neq 0 \Leftrightarrow m \neq \pm 3$. **Khi đó $f(x) \geq 0, \forall x \in R$**

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - \dfrac{m^2}{9} > 0 \\ (m+3)^2 - 9(1 - \dfrac{m^2}{9}) \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |m| < 3 \\ 2m(m+3) \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow -3 < m \le 0 \quad (4)$$

Từ (2), (3), (4) suy ra tập hợp các giá trị phải tìm của m là $-3 \le m < 0$

Cách 2: (tiếp nối từ (*))

+ Rõ ràng khi x = 0 có $f(0) = \dfrac{9}{4} > 0 \ \forall m$ (5)

Với $x \ne 0$, $f(x) \ge 0 \Leftrightarrow \dfrac{f(x)}{x^2} \ge 0 \Leftrightarrow \dfrac{9}{4} \cdot \dfrac{1}{x^2} + (m+3)\dfrac{1}{x} + (1 - \dfrac{m^2}{9}) \ge 0$ (6)

Gọi $h(\dfrac{1}{x})$ là vế trái của (6). Đó là tam thức bậc hai đối với $\dfrac{1}{x}$.

• $h(\dfrac{1}{x}) \ge 0, \forall x \ne 0 \Leftrightarrow \Delta \le 0 \Leftrightarrow (m+3)^2 - 9(1 - \dfrac{m^2}{9}) \le 0 \Leftrightarrow 2m(m+3) \le 0$

$\Leftrightarrow -3 \le m \le 0$ (7)

Từ (5), (7) suy ra tập hợp các giá trị phải tìm của m là : $-3 \le m < 0$

Thí dụ 19

Tìm a để $f(x) = 2x^4 - 4x^3 + (a+5)x^2 - (a+3)x - (a+1)(a+2) \ge 0, \forall x \in R$ (1)

Lời giải

• Biến đổi $f(x) = 2x^4 - 4x^3 + (a+5)x^2 - (a+3)x - (a^2 + 3a + 2)$

$= -a^2 + (x^2 - x - 3)a + 2x^4 - 4x^3 + 5x^2 - 3x - 2$

• $\Delta = (x^2 - x - 3)^2 + 4(2x^4 - 4x^3 + 5x^2 - 3x - 2) = 9x^4 - 18x^3 + 15x^2 - 6x + 1 = (3x^2 - 3x + 1)^2$

$a_1 = -x^2 + x - 2$; $a_2 = 2x^2 - 2x - 1 \Rightarrow f(x) = (x^2 - x + 2 + a)(2x^2 - 2x - 1 - a)$

• Gọi $\Delta_1 = 1 - 4(2+a) = -4a - 7$; $\Delta'_2 = 1 + 2(1+a) = 2a + 3$

$$\bullet\ f(x) \ge 0, \forall x \in R \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \Delta_1 \le 0 \\ \Delta_2 \le 0 \end{cases} \\ \dfrac{-1-a}{2+a} = \dfrac{2}{1} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} -4a - 7 \le 0 \\ 2a + 3 \le 0 \end{cases} \\ \dfrac{-3a-5}{2+a} = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -\dfrac{7}{4} \le a \le -\dfrac{3}{2} \\ a = -\dfrac{5}{3} \end{array}\right.$$

Bài toán 5. Tìm m để $af(m, x) \ge 0$, $\forall x \in (\alpha; \beta)$

(Đồng dấu trên một đoạn)

CÁCH GIẢI. $af(m, x) \ge 0 \ \forall x \in [\alpha; \beta] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \Delta \le 0 \\ \begin{cases} \Delta > 0 \\ af(\alpha) \ge 0; af(\beta) \ge 0 \\ \left(\dfrac{S}{2} - \alpha\right)\left(\dfrac{S}{2} - \beta\right) > 0 \end{cases} \end{array}\right.$

Thí dụ 20

Tìm tất cả m sao cho $\cos 2x + m\cos x + 4 > 0, \forall x \in (0^0; 180^0)$ (1)

Lời giải

Viết lại $\cos 2x + m\cos x + 4 > 0 \Leftrightarrow 2\cos^2 x + m\cos x + 3 > 0$.

Đặt $t = \cos x$, $|t| < 1$. Bất phương trình (1) trở thành $2t^2 + mt + 3 > 0$

Bất phương trình (1) nghiệm $\forall x \in R \Leftrightarrow f(t) = 2t^2 + mt + 3 > 0 \; \forall t \in [-1; 1]$

Điều đó có khi và chỉ khi m nghiệm một trong hai trường hợp sau

Trường hợp 1: $\Delta < 0 \Leftrightarrow m^2 - 24 < 0 \Leftrightarrow |m| < \sqrt{24}$ (2)

Trường hợp 2:

$$\begin{cases} \Delta > 0 \\ f(\pm 1) > 0 \\ \left(\frac{S}{2} + 1\right)\left(\frac{S}{2} - 1\right) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |m| > \sqrt{24} \\ 5 \pm m > 0 \\ S^2 - 4 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |m| > \sqrt{24} \\ |m| < 5 \\ m^2 - 16 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \sqrt{24} < |m| < 5 \quad (3)$$

Từ (2) và (3) ta có: $|m| < 5$ là tập hợp các giá trị phải tìm của m

Bài toán 6. Tìm m để $af(m, x) \geq 0, \forall x \in R \setminus (\alpha; \beta)$ *(Đồng dấu ngoài một khoảng)*

CÁCH GIẢI

$$af(x) > 0, \forall x \left[\begin{array}{l} x < \alpha \\ x > \beta \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \Delta < 0 \\ \begin{cases} \Delta > 0 \\ af(\alpha) > 0 \\ af(\beta) > 0 \\ \left(\frac{S}{2} - \alpha\right)\left(\frac{S}{2} - \beta\right) < 0 \end{cases} \end{array}\right.$$

Thí dụ 21

Tìm m để $x^2 - 2mx - m + 2 > 0, \forall x: \left[\begin{array}{l} x < -1 \\ x > 2 \end{array}\right.$

Lời giải

Gọi $f(x) = x^2 - 2mx - m + 2$. Ta có: $f(x) > 0, \forall x \left[\begin{array}{l} x < -1 \\ x > 2 \end{array}\right.$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \Delta' < 0 \\ \begin{cases} \Delta' > 0 \\ 1 \cdot f(-1) > 0 \\ 1 \cdot f(2) > 0 \\ \left(\frac{S}{2} + 1\right)\left(\frac{S}{2} - 2\right) < 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m^2 + m - 2 < 0 \\ \begin{cases} m^2 + m - 2 > 0 \\ m + 3 > 0 \\ 6 - 5m > 0 \\ (m + 1)(m - 2) < 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -2 < m < 1 \\ \begin{cases} m < -2 \vee m > 1 \\ m > -3 \\ m < \frac{6}{5} \\ -1 < m < 2 \end{cases} \end{array}\right.$$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -2 \le m \le 1 \\ 1 < m \le \dfrac{6}{5} \end{array}\right. \Leftrightarrow -2 \le m \le \dfrac{6}{5}$. Đó là tập hợp các giá trị phải tìm của m.

Bài toán 7. Tìm m để $a.f(x)<0$, $\forall x: \alpha<x\le \beta$ *(Trái dấu trên một khoảng)*

> CÁCH GIẢI. $a.f(x)<0, \forall x: \alpha<x\le\beta \Leftrightarrow \begin{cases} af(\alpha) \le 0 \\ af(\beta) < 0 \end{cases}$

> **Thí dụ 22**
> Cho $f(x) = \sin^6 x + \cos^6 x + a\sin x\cos x$.
> Tìm a để hàm số $y=\sqrt{f(x)}$ xác định $\forall x\in R$.

Lời giải

Biến đổi $f(x) = (\sin^2 x + \cos^2 x)^3 - 3\sin^2 x\cos^2 x(\sin^2 x + \cos^2 x) + \dfrac{a}{2}\sin 2x$

$\Leftrightarrow f(x) = 1 - \dfrac{3}{4}\sin^2 2x + \dfrac{a}{2}\sin 2x$.

Đặt $t = \sin 2x$, $|t| \le 1$, $f(x)$ trở thành $h(t) = 1 - \dfrac{3}{4}t^2 + \dfrac{a}{2}t$

Hàm số xác định $\forall x\in R \Leftrightarrow f(x) \ge 0, \forall x\in R \Leftrightarrow h(t) \ge 0, \forall t\in[-1;1]$

$\Leftrightarrow g(t) = 3t^2 - 2at - 4 \le 0, \forall t\in[-1;1] \overset{3>0}{\Leftrightarrow} \begin{cases} g(-1) \le 0 \\ g(1) \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 + 2a - 4 \le 0 \\ 3 - 2a - 4 \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow |a| \le \dfrac{1}{2}$

Tóm lại : $|a| \le \dfrac{1}{2}$ là tập hợp các giá trị phải tìm của a.

Bài toán 8. Chứng minh bất đẳng thức

> **Thí dụ 23**
> Cho $a \ge 0$ và n là số tự nhiên. Chứng minh
> $$\underbrace{\sqrt{a + \sqrt{a + \ldots + \sqrt{a}}}}_{n \text{ dấu căn}} < \frac{1 + \sqrt{1 + 4a}}{2} \qquad (1)$$

Lời giải

+ Trường hợp 1: $a = 0$, bất đẳng thức (1) hiển nhiên đúng

+ Trường hợp 2 : $a > 0$. Đặt $x_1 = \sqrt{a}$, $x_2 = \sqrt{a + \sqrt{a}}$,..., $x_n = \underbrace{\sqrt{a + \sqrt{a + \ldots + \sqrt{a}}}}_{n \text{ dấu căn}}$

Do $a > 0 \Rightarrow x_n > x_{n-1}$. Mặt khác $x_n = \sqrt{a + x_{n-1}} \Leftrightarrow x_n^2 = a + x_{n-1} \Rightarrow x_n^2 < a + x_n$

hay $x_n^2 - x_n - a < 0$ (2)

Xét $f(t) = t^2 - t - a$. Bất phương trình (2) có dạng $f(x_n) < 0$. (3)

$f(t) = 0 \Leftrightarrow t_{1,2} = \dfrac{1 \pm \sqrt{1+4a}}{2}$. Theo định lý đảo của tam thức bậc hai ta có

(3) $\Leftrightarrow t_1 < x_n < t_2 \Leftrightarrow x_n < \dfrac{1 + \sqrt{1+4a}}{2}$ (đpcm).

Thí dụ 24. Cho a, b, c > 0 và abc = 1. Gọi **Q = a + b + c**. Chứng minh **Q ≥ 3**.

Lời giải

• *Ta giải toán bằng phương pháp gián tiếp.*

Giả sử Q < 3, từ giả thiết $\begin{cases} a, b, c > 0 \\ abc = 1 \end{cases} \Rightarrow abQ < 3ab \Leftrightarrow ab^2 + a(a-3)b + 1 < 0$ (1)

Xét tam thức $f(x) = ax^2 + a(a-3)x + 1$. Ta có (1) $\Leftrightarrow af(b) < 0 \Rightarrow f(x)$ có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta > 0 \Leftrightarrow a^2(a-3)^2 - 4a > 0 \Leftrightarrow a(a-3)^2 - 4 > 0 \Leftrightarrow (a-1)^2(a-4) > 0$ $\Leftrightarrow a > 4$

$\Rightarrow a + b + c > 4$. Điều này trái giả thiết. Vậy **Q < 3 (dpcm)**

Thí dụ 25

Cho $a^3 > \sqrt{17}$ và $abc = \dfrac{1}{9}$. (1)

Chứng minh $\dfrac{a^2}{3} + b^2 + c^2 > ab + bc + ca$. (2)

Lời giải

Từ (1) $\Rightarrow \begin{cases} a > 0 \\ 36abc = 4 < \sqrt{17} < a^3 \Rightarrow 36abc - a^3 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ 36bc - a^2 < 0 \end{cases}$ (3)

Viết lại (2) $\Leftrightarrow \dfrac{a^2}{3} + (b+c)^2 > 3bc + a(b+c) \Leftrightarrow (b+c)^2 - a(b+c) + \dfrac{a^2}{3} - 3bc > 0$ (4)

Xem vế trái (3) là tam thức bậc 2 của (b + c), $\Delta = a^2 - 4(\dfrac{a^2}{3} - 3bc) = \dfrac{1}{3}(36bc - a^2)$.

Từ (3) $\Rightarrow \Delta < 0$ nên (4) đúng. Suy ra (2) được chứng minh.

Thí dụ 26

Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh a, b, c có thể lấy làm độ dài các cạnh của một tam giác khi và chỉ khi :

$pa^2 + qb^2 > pqc^2$ với $\forall (p; q) : p + q = 1$. (1)

Lời giải

• (1) $\Leftrightarrow pa^2 + (1-p)b^2 > p(1-p)c^2 \Leftrightarrow c^2p^2 - (b^2 + c^2 - a^2)p + b^2 > 0$ (2)

Bởi c > 0, nên VT (2) là một tam thức bậc 2 đối với p.

$\Delta = (b^2 + c^2 - a^2)^2 - 4b^2c^2 = (b^2 + c^2 - a^2 + 2bc)(b^2 + c^2 - a^2 - 2bc)$

$= [(b + c)^2 - a^2].[(b - c)^2 - a^2] = (b + c + a)(b + c - a)(b - c - a)(b - c + a)$

• (1) đúng $\forall(p; q) : p + q = 1 \Leftrightarrow$ (2) đúng $\forall p \in R \Leftrightarrow \Delta < 0$

Do $a, b, c > 0$ nên $\Delta < 0 \Leftrightarrow (b + c - a)(b - c - a)(b - c + a) < 0$

$\Leftrightarrow (b + c - a)(c + a - b)(a + b - c) > 0$ (3)

Để ý : Trong (3) khả năng có hai thừa số âm không thể xảy ra.

Thật vậy: chẳng hạn $\begin{cases} b + c - a < 0 \\ c + a - b < 0 \end{cases}$. Cộng theo từng vế $\Rightarrow 2c < 0 \Leftrightarrow c < 0$.

Trái giả thiết

• Do vậy (3) $\Leftrightarrow$ cả 3 thừa số đều dương $\Leftrightarrow$ a, b, c thoả mãn điều kiện độ dài của một tam giác. (đpcm)

Thí dụ 27

Cho 3 số thực dương phân biệt a, b, c: $(0 < a < b < c)$

Gọi $P = 4(a + b + c)$, $Q = 2(ab + bc + ca)$, $d = a^2 + b^2 + c^2$.

Chứng minh : $a < \frac{1}{3}\left(\frac{P}{4} - \sqrt{d - \frac{Q}{2}}\right) < \frac{1}{3}\left(\frac{P}{4} + \sqrt{d - \frac{Q}{2}}\right) < c$

Lời giải

$$\text{Đặt } \begin{cases} \alpha = \frac{1}{3}\left(\frac{P}{4} - \sqrt{d - \frac{Q}{2}}\right) \\ \beta = \frac{1}{3}\left(\frac{P}{4} + \sqrt{d - \frac{Q}{2}}\right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha + \beta = \frac{P}{6} \\ \alpha.\beta = \frac{1}{9}\left(\frac{P^2}{16} - d + \frac{Q}{2}\right) \end{cases}$$

Ta có :

• $d - \frac{Q}{2} = (a^2 + b^2 + c^2) - (ab+bc+ca) = \frac{1}{2}[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2] > 0$ (do $a<b<c$)

$\Rightarrow$ Bài toán có nghĩa và $\alpha < \beta$ (1)

$\Rightarrow \alpha, \beta$ là hai nghiệm phân biệt của phương trình

$f(t)$: $t^2 - \frac{P}{6}t + \frac{1}{9}\left(\frac{P^2}{16} - d + \frac{Q}{2}\right) = 0$ (2)

• $\frac{S}{2} = \frac{\alpha + \beta}{2} = \frac{P}{12} = \frac{a + b + c}{3} \Rightarrow a < \frac{S}{2} < c$ (do $a<b<c$) (3)

• $f(a) = a^2 - \frac{P}{6}a + \frac{1}{9}\left(\frac{P^2}{16} - d + \frac{Q}{2}\right) = a^2 - \frac{2a(a + b + c)}{3} + \frac{ab + bc + ca}{3}$

$= \frac{a^2 - ab + bc - ca}{3} = \frac{(a - b)(a - c)}{3} > 0$ (do $a<b<c$) (4)

• Tương tự $f(c) = \frac{(c - a)(c - b)}{3} > 0$ (do $a<b<c$) (5)

• Từ (2), (3), (4), (5) suy ra phương trình (1) có các nghiệm α, β thoả mãn $a < \alpha < \beta < c$. **Đó là dpcm.**

Lời bình

Để chứng minh $a<b<c<d$, ta có thể làm theo các cách sau:

1. Nếu biết được $a<c$ thì xét PT $f(x)=x^2-(a+c)x+ac$ và chứng tỏ

$$f(b)<0<f(d),\ \frac{S}{2}<d$$

2. Nếu biết được $b<d$ thì xét PT $f(x)=x^2-(b+d)x+bd$ và chứng tỏ

$$f(c)<0<f(a),\ \frac{S}{2}>a$$

3. Nếu biết được $a<d$ thì xét PT $f(x)=x^2-(a+d)x+ad$ và chứng tỏ $f(b)<0,\ f(c)<0,\ b<c$

4. Nếu biết được $b<c$ thì xét PT $f(x)=x^2-(b+c)x+bc$ và chứng tỏ

$$\left(f(a)>0,\ f(d)>0,\ a<\frac{S}{2}<d\right)$$

Thí dụ 28

Cho n+2 số thực dương $\alpha, \beta, a_1, a_2, \ldots, a_n$ thoả $\alpha \le a_i \le \beta$, $\forall i=1, 2, \ldots, n$.

Gọi $S_1 = \frac{1}{n}(a_1+a_2+\ldots+a_n)$, $S_2 = \frac{1}{n}(a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2)$. Chứng minh :

$$\frac{S_2}{S_1^2} \le \frac{(\alpha+\beta)^2}{4\alpha\beta} \qquad (1)$$

Lời giải

Ta có $\alpha \le a_1 \le \beta \Leftrightarrow (a_1-\alpha)(a_1-\beta) \le 0 \Leftrightarrow a_1^2-(\alpha+\beta)a_1+\alpha\beta \le 0$.

Dấu đẳng thức có khi và chỉ khi $a_1 = \alpha$ hoặc $a_1 = \beta$.

Tương tự : $a_2^2-(\alpha+\beta)a_2+\alpha\beta \le 0$

$a_3^2-(\alpha+\beta)a_3+\alpha\beta \le 0$

. . . .

$a_n^2-(\alpha+\beta)a_n+\alpha\beta \le 0$

Cộng theo từng vế n bất phương trình trên có

$$(a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2)-(\alpha+\beta)(a_1+a_2+\ldots+a_n)+n\alpha\beta \le 0$$

$$\Leftrightarrow nS_2-n(\alpha+\beta)S_1+n\alpha\beta \le 0 \Leftrightarrow S_2+\alpha\beta \le (\alpha+\beta)S_1 \qquad (2)$$

Theo bất đẳng thức Cô si : $S_2+\alpha\beta \ge 2\sqrt{\alpha\beta S_2}$ (3)

Từ (2), (3) suy ra : $2\sqrt{\alpha\beta S_2} \le (\alpha+\beta)S_1 \Leftrightarrow \frac{S_2}{S_1^2} \le \frac{(\alpha+\beta)^2}{4\alpha\beta}$ (dpcm)

Dấu đẳng thức có khi và chỉ khi $a_i=\alpha$ hoặc $a_i=\beta$ với $\forall a_i=1, 2, \ldots, n$.

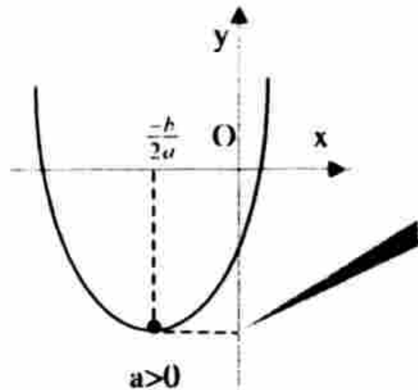
Bài toán 9.

Tìm giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất bằng tam thức bậc hai

Toạ độ đỉnh của parabol ($\mathcal{P}$): $f(x)=x^2+bx+c$ là $\left(x_0=-\dfrac{b}{2a};\ y_0=-\dfrac{\Delta}{4a}\right)$

Kí hiệu $\begin{cases} \max\limits_{D} f(x) \text{ là giá trị lớn nhất của } f(x) \text{ trên miền D} \\ \min\limits_{D} f(x) \text{ là giá trị nhỏ nhất của } f(x) \text{ trên miền D} \end{cases}$

Trường hợp 1. D=R

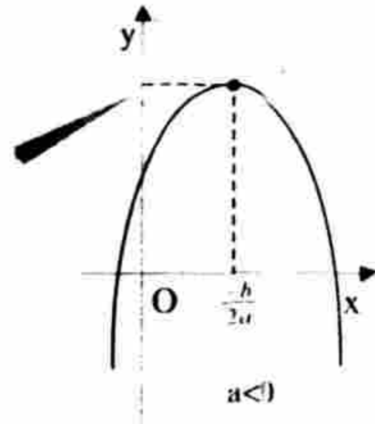


$-\frac{\Delta}{4a}$

$-\frac{\Delta'}{a}$

$f(\frac{-b}{2a})$

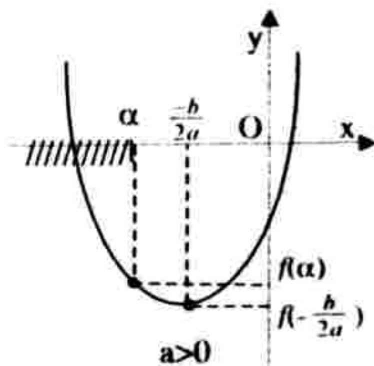
$f(\frac{-b'}{a})$

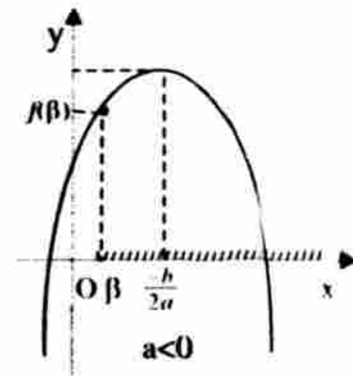


Hình 12.1 *Hình 12.2*

- $a>0$: $\max\limits_{D} f(x)=f(-\dfrac{b}{2a})=-\dfrac{\Delta}{4a}$, không tồn tại $\min\limits_{D} f(x)$. (h. 12.1)
- $a<0$: $\min\limits_{D} f(x)=f(-\dfrac{b}{2a})=-\dfrac{\Delta}{4a}$, không tồn tại $\max\limits_{D} f(x)$. (h. 12.2)

Trường hợp 2 : $D=\{x\in R \mid x\geq\alpha\}$ hoặc $D=\{x\in R \mid x\leq\beta\}$



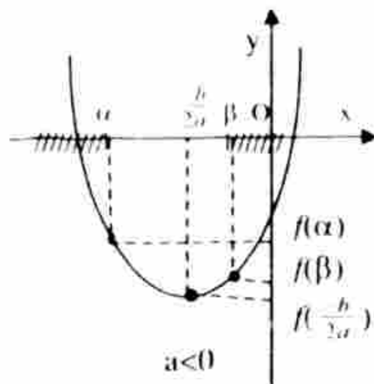


Hình 13.1 *Hình 12.2*

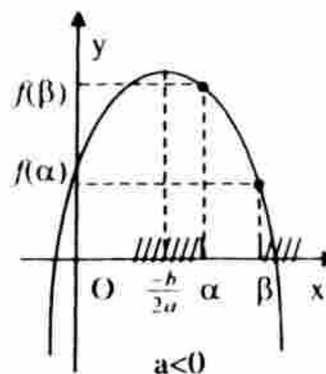
- a>0 : $\begin{cases} +\min\limits_{D} f(x)=\min\{f(\frac{-b}{2a}),\ f(\alpha)\},\ \text{hoặc}\ \min\{f(\frac{-b}{2a}),\ f(\beta)\} \\ +\ \text{không tồn tại}\ \max\limits_{D} f(x) \end{cases}$
- a<0 : $\begin{cases} +\max\limits_{D} f(x)=\max\{f(\frac{-b}{2a}),\ f(\alpha)\},\ \text{hoặc}\ \max\{f(\frac{-b}{2a}),\ f(\beta)\} \\ +\text{không tồn tại}\ \min\limits_{D} f(x) \end{cases}$

Chú ý : Nếu $\frac{-b}{2a}\notin D$, không phải xét $f(\frac{-b}{2a})$

Trường hợp 3: $D=[\alpha;\beta]$



Hình 12.1



Hình 12.2

- $\max\limits_{D} f(x) = \max\{f(\frac{-b}{2a}), f(\alpha), f(\beta)\}$
- $\min\limits_{D} f(x) = \min\{f(\frac{-b}{2a}), f(\alpha), f(\beta)\}$

Chú ý: Nếu $\frac{-b}{2a} \notin D$, đương nhiên không xét $f(\frac{-b}{2a})$

Thí dụ 29

Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = x^2 + 2x + 3$ trên

$D=[-3;0]$; $E=[0;3]$

Lời giải

- Để ý : $\begin{cases} a>0 \\ -\dfrac{b}{2a} = -1 \in D \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \min\limits_{D} f(x) = f(-1) = 2 \\ \max\limits_{D} f(x) = \max\{f(0);f(-3)\} = \max\{3;\ 6\} = 6 \end{cases}$

- Để ý: $\{a>0;\ -\dfrac{b}{2a} = -1 \notin E\}$

$$\Rightarrow \begin{cases} \min\limits_{E} f(x) = \min\{f(0);f(3)\} = \min\{3;\ 18\} = f(0) = 3 \\ \max\limits_{E} f(x) = \max\{f(0);f(3)\} = \max\{3;\ 18\} = f(3) = 18 \end{cases}$$

Thí dụ 30

Giả sử x, y là nghiệm của hệ (I) $\begin{cases} x + y = a - 1 \\ xy = a^2 - 7a + 14 \end{cases}$

Tìm a để $U = x^2 + y^2$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Lời giải

Trước hết hệ (I) có nghiệm $\Leftrightarrow S^2 - 4P \geq 0 \Leftrightarrow (a-1)^2 - 4(a^2 - 7a + 14) \geq 0$

$\Leftrightarrow -3a^2 + 26a - 55 \geq 0 \Leftrightarrow \dfrac{11}{3} \leq a \leq 5$. Gọi $D = \left[\dfrac{11}{3};5\right]$ (2)

Viết lại $U = S^2 - 2P = (a-1)^2 - 2(a^2 - 7a +) = -a^2 + 12a - 27$. Gọi $f(a) = -a^2 + 12a - 27$.

$\Rightarrow$ Min$U = \min\limits_{D} f(a)$. Bài toán dẫn tới tìm $\min\limits_{D} f(a)$.

Ta có $f\left(\frac{11}{3}\right) = \frac{32}{9}$; $f(5)=8$.

Suy ra $\min\limits_{D} f(a) = \min\left\{f\left(\frac{11}{3}\right); f(5)\right\} = \min\left\{\frac{32}{9}; 8\right\} = f\left(\frac{11}{3}\right) = \frac{32}{9}$

Vậy Min$U = \frac{32}{9}$, đạt được khi $a = \frac{11}{3}$

> **Thí dụ 31**
>
> Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:
>
> $Q = \frac{x^4}{y^4} + \frac{y^4}{x^4} - \frac{x^2}{y^2} - \frac{y^2}{x^2} + \frac{x}{y} + \frac{y}{x}$. (với $x \neq 0$, $y \neq 0$).

Lời giải

Đặt $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} = t$, $|t| \geq 2$. Biểu thức Q trở thành

$$Q' = \left[(t^2 - 2)^2 - 2\right] - (t^2 - 2) + t = (t^2 - 2)(t^2 - 3) + t - 2 \qquad (1)$$

Để ý $|t| \geq 2 \Rightarrow t^2 \geq 4 \Rightarrow t^2 - 3 \geq 1$. Do vậy từ (1) suy ra $Q' \geq t^2 + t - 4$.
Dấu đẳng thức có khi và chỉ khi $|t|=2$. Gọi $f(t) = t^2 + t - 4$.
Hiển nhiên $Q' \geq \min\limits_{D} f(t)$ Bài toán dẫn tới tìm GTNN của $f(t)$ trên

$$D = \{t \in R \mid |t| \geq 2\}$$

Ta có : $\begin{cases} a = 1 > 0 \\ -\frac{b}{2a} = -\frac{1}{2} \notin D \end{cases} \Rightarrow \min\limits_{D} f(t) = \min\{f(-2); f(2)\} = \min\{-2; 2\} = -2$

Dấu đẳng thức trong tất cả các đánh giá trên đồng thời xẩy ra khi và chỉ khi $t = -2 \Leftrightarrow x = -y \Rightarrow \min Q = \min\limits_{D} f(t) = -2$.

> **Thí du 32**. (ĐHSP Hà Nội, khối A năm học 2001-2002)
>
> Tìm GTLN, GTNN của hàm số $y = \frac{3\cos^4 x + 4\sin^2 x}{3\sin^4 x + 2\cos^2 x}$

Lời giải

Viết lại $y - 1 = \frac{3(\cos^4 x - \sin^4 x) + 4\sin^2 x - 2\cos^2 x}{3\sin^4 x + 2\cos^2 x}$

$\Leftrightarrow y - 1 = \frac{3(\cos^2 x - \sin^2 x) + 4\sin^2 x - 2\cos^2 x}{3\sin^2 x + 2\cos^2 x}$

$\Leftrightarrow y - 1 = \frac{1}{3\sin^4 x + 2\cos^2 x}$. Đặt $\sin^2 x = t$, $t \in [0; 1]$, hàm số trở thành

$y - 1 = \frac{1}{3t^2 - 2t + 2}$. Gọi $f(t) = 3t^2 - 2t + 2$.

Thấy rằng $\begin{cases} f(t) > 0, \forall t \in [0,1], \text{ do } \Delta' = -5 < 0 \text{ và } a = 3 > 0 \\ -\dfrac{b}{2a} = \dfrac{1}{3} \in [0,1] \end{cases}$, suy ra:

- $\min f(t) = -\dfrac{\Delta'}{a} = \dfrac{5}{3} \Rightarrow \max\limits_D (y-1) = \dfrac{3}{5} \Leftrightarrow \max\limits_D y = \dfrac{3}{5} + 1 = \dfrac{8}{5}$, có được khi

và chỉ khi $t = \dfrac{1}{3} \Leftrightarrow \sin^2 x = \dfrac{1}{3}$.

- $\max f(t) = \max\{f(0); f(1)\} = \max\{2; 3\} = f(1) = 3 \Rightarrow \min\limits_D (y-1) = \dfrac{1}{3}$

$\Leftrightarrow \min\limits_D y = \dfrac{1}{3} + 1 = \dfrac{4}{3}$, có được khi và chỉ khi $t = 1 \Leftrightarrow \sin^2 x = 1$.

Tóm lại : GTLN của hàm số bằng $\dfrac{8}{5}$; GTNN của hàm số bằng $\dfrac{4}{3}$.

Thí dụ 33.

Tìm giá trị lớn nhất của m thoả mãn hệ sau có nghiệm

$$\begin{cases} x^2 + x - 12 \le 0 & (1) \\ x^2 + 4mx + 3m^2 - 4m - 4 \le 0 & (2) \end{cases}$$

Lời giải

Viết lại (1) $\Leftrightarrow x \in D = [-4; 3]$

Gọi $f(x) = x^2 + 4mx + 3m^2 - 4m - 4$. Rõ ràng hệ có nghiệm $\Leftrightarrow \min_D f(x) \le 0$.

Hoành độ parabol là $x_0 = -\dfrac{b'}{a} = -2m$

+ Nếu $-2m \le -4 \Leftrightarrow m \ge 2$ thì $\min_D f(x) = f(-4) = 3m^2 - 20m + 12$

Ta có : $3m^2 - 20m + 12 \le 0 \Leftrightarrow \dfrac{2}{3} \le m \le 6$. Kết hợp với $m \ge 2$ có

$\min_D f(x) \le 0 \Leftrightarrow 2 \le m \le 6$ (3)

+ Nếu $-2m \ge 3 \Leftrightarrow m \le -\dfrac{3}{2}$ thì $\min_D f(x) = f(3) = 3m^2 + 8m + 5$

Ta có: $3m^2 + 8m + 5 \le 0 \Leftrightarrow -\dfrac{5}{3} \le m \le -1$.

Kết hợp với $m \le -\dfrac{3}{2}$ có $\min_D f(x) \le 0 \Leftrightarrow -\dfrac{5}{3} \le m \le -\dfrac{3}{2}$ (4)

+ Nếu $-4 < -2m < 3 \Leftrightarrow -\dfrac{3}{2} < m < 2$ thì $\min_D f(x) = f(-2m) = -(m+2)^2 \le 0$, $\forall m \in R$

Kết hợp với $-\dfrac{3}{2} < m < 2 \Rightarrow \min_D f(x) \le 0 \Leftrightarrow -\dfrac{3}{2} < m < 2$. (5)

Từ (3), (4), (5) suy ra $\min_D f(x) \le 0 \Leftrightarrow -\dfrac{5}{3} \le m \le 6$. Do vậy giá trị lớn nhất của m thoả mãn hệ phương trình có nghiệm là m=6

• *Bạn biết thêm cách 2:*

Viết lại (1) $\Leftrightarrow x \in D_1 = [-4; 3]$

Xét PT (2) có $\Delta' = (m+2)^2 \geq 0, \forall x \in R$. Suy ra BPT(2) $\Leftrightarrow x \in D_2 = [x_1; x_2]$, trong đó $x_{1,2}$ là nghiệm của $f(x): x^2 + 4mx + 3m^2 - 4m - 4 = 0$

Hệ đã cho có nghiệm $\Leftrightarrow D_1 \cap D_2 \neq \varnothing$. Điều đó có khi và chỉ khi xảy ra 1 trong 3 trường hợp sau đây :

Trường hợp 1: $x_1 \leq -4 < x_2 \Leftrightarrow f(-4) \leq 0 \Leftrightarrow 3m^2 - 20m + 12 \leq 0 \Leftrightarrow \frac{2}{3} \leq m \leq 6$ (6)

Trường hợp 2 : $x_1 < 3 \leq x_2 \Leftrightarrow f(3) \leq 0 \Leftrightarrow 3m^2 + 8m + 5 \leq 0 \Leftrightarrow -\frac{5}{3} \leq m \leq -1$. (7)

Trường hợp 3 : $-4 < x_1 < x_2 < 3 \Leftrightarrow \begin{cases} f(-4) > 0 \\ f(3) > 0 \\ (\frac{S}{2} + 4)(\frac{S}{2} - 3) < 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m < -\frac{5}{3} \vee m > -1 \\ m < \frac{2}{3} \vee m > 6 \\ (2m-4)(2m+3) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < -\frac{5}{3} \vee m > -1 \\ m < \frac{2}{3} \vee m > 6 \\ -\frac{3}{2} < m < 2 \end{cases} \Leftrightarrow -1 \leq m \leq \frac{2}{3}. \quad (8)$$

Từ (6), (7), (8) suy ra hệ đã cho có nghiệm $\Leftrightarrow -\frac{5}{3} \leq m \leq 6$

Do vậy giá trị lớn nhất của m thoả mãn hệ phương trình có nghiệm là $m = 6$

Thí dụ 34 *(Đ60II)*.
Tìm m để $x^2 - 2mx + 2|x - m| + 2 > 0$ nghiệm đúng $\forall x$ (1)

Lời giải

Đặt $|x - m| = t \geq 0$, bất phương trình trở thành $t^2 + 2t + 2 - m^2 > 0$.

Gọi $f(t) = t^2 + 2t + 2 - m^2$. Bất phương trình (1) nghiệm $\forall x \in R \Leftrightarrow \min_{t \geq 0} f(t) > 0$

Để ý $-\frac{b'}{a} = -1 < 0 \Rightarrow \min_{t \geq 0} f(t) = f(0) = 2 - m^2 > 0 \Leftrightarrow |m| < \sqrt{2}$

Vậy bất phương trình (1) nghiệm $\forall x \in R \Leftrightarrow |m| < \sqrt{2}$

Thí dụ 35 *(Đ143III₁)*.
Cho $f(x) = x^2 + (m+1)x + 2|x + m - 1| + (m+1)^2$ (1)
Tìm m để $\min_R f(x) \leq 3$

Lời giải

Đặt $|x + m - 1| = t \Leftrightarrow x = 1 - m \pm t$ với điều kiện $t \geq 0$.

• *Trường hợp 1*: $x = 1 - m + t$, $f(x)$ trở thành $f_1(t) = t^2 - 2(m-2)t + 2(m^2+1)$ (2)

Xét $t_0 = -\dfrac{b'}{a} = m - 2$

+ $t_0 \le 0 \Leftrightarrow m \le 2$. Sẽ có $\min\limits_{t\ge 0} f_1(t) = f(0) = 2(m^2+1) \le 3 \Leftrightarrow 2m^2 \le 1 \Leftrightarrow |m| \le \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ (3)

+ $t_0 > 0 \Leftrightarrow m > 2$ (4)

Sẽ có $\min\limits_{t\ge 0} f(t) = -\dfrac{\Delta'}{a} = m^2 + 4m - 2 \le 3 \Leftrightarrow m^2 + 4m - 5 \le 0 \Leftrightarrow -5 \le m \le 1$ (5)

Đối chiếu với (4) $\Rightarrow$ kết quả (5) không thích hợp (6)

Từ (3), (6) suy ra $\min\limits_{t\ge 0} f_1(t) \le 3 \Leftrightarrow |m| \le \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ (7)

• *Trường hợp 2*: $x = 1 - m - t$, $f(x)$ trở thành $f_2(t) = t^2 + 2mt + 2(m^2+1)$ (8)

Xét $t_0 = -\dfrac{b'}{a} = -m$

+ $m \ge 0 \Leftrightarrow t_0 \le 0$. Sẽ có $\min\limits_{t\ge 0} f_2(t) = f(0) = 2(m^2+1) \le 3$

$$\Leftrightarrow 2m^2 \le 1 \overset{m\ge 0}{\Leftrightarrow} 0 \le m \le \frac{1}{\sqrt{2}} \quad (9)$$

+ $m < 0 \Leftrightarrow t_0 > 0$ Sẽ có $\min\limits_{t\ge 0} f_2(t) = -\dfrac{\Delta'}{a} = m^2 + 2 \le 3 \Leftrightarrow m^2 \le 1 \overset{m<0}{\Leftrightarrow} -1 \le m \le 0$ (10)

Từ (9), (10) suy ra $\min\limits_{t\ge 0} f_2(t) \le 3 \Leftrightarrow -1 \le m \le \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ (11)

Từ (7), (11) kết luận tập hợp các giá trị phải tìm của m là $-1 \le m \le \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

Chú ý 1. *Các bạn xem tiếp §3 chương II trang45*

Chú ý 2. *Dạng toán thứ 10 của tam thức bậc hai là "dấu hiệu nhận biết phương trình bậc hai có nghiệm". Các bạn xem §4 chương II*

BÀI TẬP

1. Tìm m để biểu thức $\sqrt{(1-m^2)x^2 - (m-1)x + \dfrac{1}{4}}$ có nghĩa $\forall x \in R$

2. Tìm a để : $x^4 - 10x^3 - 2(a-11)x^2 + 2(5a+6)x + a(2+a) \ge 0, \forall x \in R$.

3. (Đ5, I_2) : Tìm a để phương trình sau có nghiệm thuộc $(0; \dfrac{\pi}{2})$

$$(1-a)\text{tg}^2x - \frac{2}{\cos x} + 1 + 3a = 0$$

4. (Đ123, III) Tìm m để bất phương trình $x^2 - 2mx + 2|x-m| + 2 + m^2 + m - 1 \le 0$ có nghiệm .

5. (Đ13 II) Tìm m để hàm số $y = mx + |x^2 + 4x - 3|$ có giá trị nhỏ nhất lớn hơn 1.

Chương IV
PHƯƠNG TRÌNH BẬC CAO

§1. NHẨM NGHIỆM ĐƯA VỀ PHƯƠNG TRÌNH TÍCH

I. Sơ đồ Horner

Cho đa thức $Q(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+...+a_{n-2}x^2+a_{n-1}x+a_n$

• **Mệnh đề** :

Số dư trong phép chia Q(x) cho x−c là Q(c).

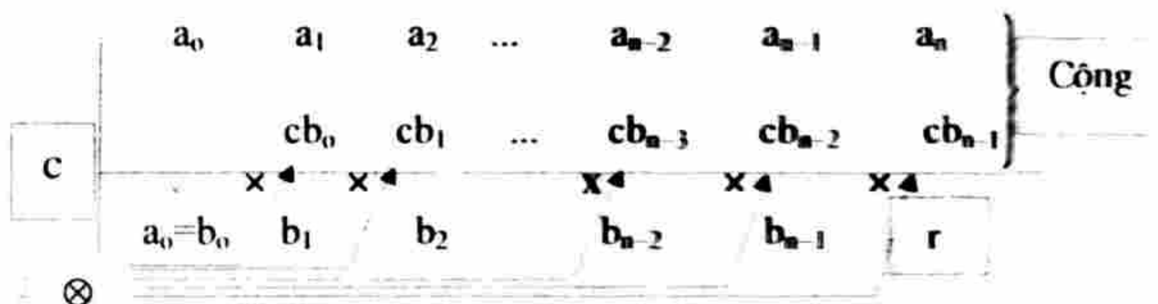
Thật vậy : Gọi thương và số dư của Q(x) trong phép chia cho x−c theo thứ tự là h(x) và r, tức là $Q(x) = (x - c)h(x) + r$. (*)

Thay x = c ta có Q(c) = r (dpcm)

• Việc tìm thương h(x) và số dư r thật đơn giản nhờ sơ đồ Horner như sau :

Giả sử $h(x) = b_0x^{n-1} + b_1x^{n-2} + b_2x^{n-3} + ...+ b_{n-2}x + b_{n-1}$

Từ (*) suy ra : $b_0 = a_0$; $b_1 = a_1 + cb_0$; $b_2 = a_2 + cb_1$;...; $b_{n-1} = a_{n-1} + cb_{n-2}$; $r = a_n + cb_{n-1}$



Thí dụ 1.

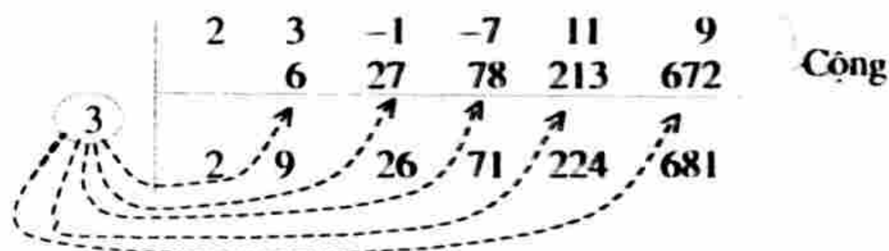
Cho biểu thức $Q(x) = 2x^5 + 3x^4 - x^3 - 7x^2 + 11x + 9$

a) Tính giá trị của biểu thức Q(x) tại x = 3

b) Tìm thương của phép chia Q(x) cho x−3

Lời giải

Lập sơ đồ *Horner*



Thuật toán *Horner* cho :

a) Số dư của Q(x) cho x−3 là 681 ⇔ Q(3)= 681

b) Thương của phép chia Q(x) cho x−3 là $h(x) = 2x^4 + 9x^3 + 26x^2 + 71x + 224$

Thí dụ 2.

Tìm số dư r của phép chia $Q(x)=1+2x-3x^2+4x^3+...+(-1)^n nx^n$ cho $x+1$

Lời giải

Theo *Horner* ta có $r=Q(-1)=1+2+3+...+n=\frac{n(n+1)}{2}$.

Thí dụ 3.

Tìm số dư r của phép chia $Q(x)=x^3+x+1$ cho x^3-x

Lời giải

Giả sử $Q(x) = x(x-1)(x+1)h(x) + r(x) \Rightarrow r(x)$ có dạng $r(x) = ax^2 + bx + c$

Hay $Q(x) = x(x-1)(x+1)h(x) + (ax^2 + bx + c)$.

Ta có $\begin{cases} r(0) = c \\ r(-1) = a - b + c \\ r(1) = a + b + c \end{cases}$ và $\begin{cases} Q(0) = 1 \\ Q(-1) = 3 \\ Q(1) = -1 \end{cases}$ Theo *Horner*

$\begin{cases} r(0) = Q(0) \\ r(-1) = Q(-1) \\ r(1) = Q(1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 1 \\ a - b + c = 3 \\ a + b + c = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = -2 \\ c = 1 \end{cases}$ Vậy $r(x)=2x+1$

• *Chú ý.*

Số thực c được gọi là nghiệm của đa thức Q(x) nếu và chỉ nếu $Q(c) = 0$.

Như vậy : Nếu số dư $r=0$, thì $x=c$ là một nghiệm của Q(x).

Sơ đồ *Horner* cho ta cách phân tích đa thức thành nhân tử (theo nghiệm). Chúng ta ứng dụng kỹ thuật này để biến đổi phương trình về phương trình tích

II. Đoán nghiệm hữu tỷ

1) Chúng ta ghi nhớ các nhận xét sau để đoán nghiệm hữu tỷ

Cho đa thức $Q(x)= a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+...+a_{n-2}x^2+a_{n-1}x+a_n$ $(a_0 \neq 0)$

• Đa thức bậc n có không quá n nghiệm thực. Từ đây suy ra :

Nếu đa thức Q(x) (bậc n) triệt tiêu tại nhiều hơn n điểm thì $Q(x)=0, \forall x \in R$

• Nếu đa thức Q(x) có nghiệm hữu tỷ $x =$ thì p là ước của a_n, q là ước của a_0

Đặc biệt $a_0 = \pm 1$, thì nghiệm hữu tỷ (nếu có) của Q(x) thì nó ước của a_n

• Nếu tổng các hệ số bằng không thì đa thức có nghiệm $x = 1$.

• Nếu tổng các hệ số bậc chẵn bằng tổng các hệ số bậc lẻ thì đa thức có nghiệm $x = -1$.

2) Ngoài ra các bạn tham khảo các cách tìm nghiệm đặc biệt của một vài phương trình được nêu trong các thí dụ 5, 6 dưới đây.

III. Nhẩm nghiệm đưa về phương trình tích

Sau khi đoán được nghiệm hữu tỷ, ta sử dụng thuật chia Horner để biến đổi về phương trình tích

> **Thí dụ 4.**
> Giải phương trình $x^4 - 8x^3 - 3x^2 + 32x - 4 = 0$ (1)

Lời giải

+ Đoán nghiệm :

Phương trình không có nghiệm $x = \pm 1$

Nghiệm hữu tỷ (nếu có) của (1) phải là ước của 4 tức $x = \pm 2$; $x = \pm 4$

Dùng sơ đồ Horner

	1	–8	–3	32	–4
2		2	–12	–30	4
	1	–6	–15	2	0

Sơ đồ Horner cho thấy phương trình có một nghiệm x = 2, suy ra

$(1) \Leftrightarrow (x-2)(x^3 - 6x^2 - 15x + 2) = 0$

Xem phương trình $x^3 - 6x^2 - 15x + 2 = 0$ (2)

. Phương trình không có nghiệm $x = \pm 1$

. Nghiệm hữu tỷ (nếu có) của (2) phải là ước của 2 tức $x = \pm 2$

Dùng sơ đồ Horner

	1	–6	–15	2
–2		–2	16	–2
	1	–8	1	0

Sơ đồ Horner cho thấy phương trình có một nghiệm x=–2, suy ra

Suy ra $(2) \Leftrightarrow (x+2)(x^2-8x+1)=0$ Vậy $(1) \Leftrightarrow (x-2)(x+2)(x^2-8x+1)=0$

Do đó (1) có 4 nghiệm : $x=\pm 2$, $x=4\pm\sqrt{15}$

Chú ý

Bạn có thể phân tích đa thức ra thừa số bằng các cách :

1) Tách–nhóm các số hạng : $(1) \Leftrightarrow x^4 - 4x^2 - 8x^3 + 32x + x^2 - 4 = 0$

$\Leftrightarrow x^2(x^2-4) - 8(x^2-4) + (x^2-4) = 0 \Leftrightarrow (x^2-4)(x^2-8x+1)=0$

2) Đồng nhất thức : Giả sử $x^4 - 8x^3 - x^2 + 32x - 4 = (x^2+mx+n)(x^2+px+q)$ (3)

Trong đó m, n, p, q là các hệ số nguyên cần xác định.

Viết lại $(3) \Leftrightarrow x^4 - 8x^3 - 3x^2 + 32x - 4$

$= x^4 + (m+p)x^3(mp+n+q)x^2 + (np+mq)x + nq$

Suy ra (*) $\begin{cases} m+p=-8 \\ mp+n+q=-3 \\ np+mq=32 \\ nq=-4 \end{cases}$. Từ phương trình cuối của hệ suy ra cặp (n; q)

chỉ nhận 1 trong 3 cặp sau đây : (2; –2), (1; –4), (–1; 4)

Thay vào các phương trình còn lại của (*). Với cặp (1; –4) có

$\begin{cases} m+p=-8 \\ mp=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=0 \\ p=-8 \end{cases}$. Thay vào (3) có $(1) \Leftrightarrow (x^2-4)(x^2-8x+1)=0$.

Thí dụ 5.
Giải phương trình $2x^3-11x^2+11x-3=0$ (4)

Lời giải

Phương trình không có nghiệm $x = \pm 1$
Các ước của hạng tử tự do $a_3 = \pm 1; \pm 2; \pm 3$
Các ước của hạng tử bậc cao nhất $a_0 = \pm 1; \pm 2$
Bằng cách thử ta thấy $x = \frac{1}{2}$ là một nghiệm của phương trình (4)
Dùng sơ đồ Horner

	2	−11	11	−3
$\frac{1}{2}$		1	−5	3
	2	−10	6	0

Suy ra (4) $\Leftrightarrow 2(x-\frac{1}{2})(x^2-5x+3)=0 \Leftrightarrow \left[x = \frac{1}{2};\ x = \frac{5 \pm \sqrt{13}}{2}\right]$

Thí dụ 6
Tìm m để phương trình sau có 3 nghiệm dương phân biệt :
$x^3 - (2m+1)x^2 + (3m+1)x - (m+1) = 0$ (1)

Lời giải

Để ý : Tổng các hệ số bằng 0, phương trình (1) có nghiệm x = 1.
Dùng sơ đồ Horner

	1	−(2m+1)	(3m+1)	−(m+1)
1		1	−2m	m+1
	1	−2m	m+1	0

Suy ra (1) $\Leftrightarrow (x-1)(x^2-2mx+m+1)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x^2 - 2mx + m + 1 = 0 \quad (2) \end{array}\right.$

Gọi $h(x) = x^2 - 2mx + m + 1$. Phương trình (1) có 3 nghiệm dương phân biệt
$\Leftrightarrow$ Phương trình (2) có 2 nghiệm dương phân biệt khác 1.
Điều đó xảy ra khi và chỉ khi :

$$\begin{cases} \Delta' > 0 \\ P > 0 \\ S > 0 \\ h(1) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - m - 1 > 0 \\ m + 1 > 0 \\ 2m > 0 \\ 2 - m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} m < \frac{1-\sqrt{5}}{2} \\ m > \frac{1+\sqrt{5}}{2} \end{array}\right. \\ m > -1 \\ m > 0 \\ m \neq 2 \end{cases} \Leftrightarrow m > \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Vậy tập giá trị phải tìm của m là $m > \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Thí dụ 7

Giải phương trình $x^4 + 4 = 5x(x^2 - 2)$ (1)

Lời giải

Khai triển (1) $\Leftrightarrow$ $x^4 - 5x^3 + 10x + 4 = 0$ (1')

Để ý : Tổng các hệ số bậc chẵn bằng tổng các hệ số bằng lẻ (bằng 5)

$\Rightarrow$ Phương trình (1') có nghiệm $x = -1$

Dùng sơ đồ Horner :

	1	−5	0	10	4
−1		−1	6	−6	−4
	1	−6	6	4	0

Suy ra : (1') $\Leftrightarrow (x + 1)(x^3 - 6x^2 + 6x + 4) = 0$ (2)

Xem phương trình $x^3 - 6x^2 + 6x + 4 = 0$

. Phương trình không có nghiệm $x = \pm 1$

. Nghiệm hữu tỷ (nếu có) của (2) phải là ước của 4 tức $x = \pm 2; \pm 4$

Bằng cách thử ta thấy x=2 là một nghiệm của phương trình (2)

Dùng sơ đồ Horner :

	1	−6	6	4
2		2	−8	−4
	1	−4	−2	0

Suy ra (2) $\Leftrightarrow (x - 2)(x^2 - 4x - 2) \Leftrightarrow \{x = 2; x = 2 \pm \sqrt{6}\}$

Vậy tập hợp nghiệm của phương trình (1) là : $\left\{x = -1; x = 2; x = 2 \pm \sqrt{6}\right\}$

Thí dụ 8

Tìm a để phương trình có 3 phân biệt lập thành cấp số cộng

$$x^3 - (\frac{1}{2} + 2a)x^2 + (2a^2 - 2a + 2)x - a^2 + \frac{3}{2}a - 1 = 0 \quad (1)$$

Lời giải

Viết lại (1) $\Leftrightarrow (2x-1)a^2 - (2x^2+2x-\frac{3}{2})a + x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 2x - 1 = 0$ (2)

Gọi vế trái của (2) là Q(a)

Phương trình (1) có nghiệm không phụ thuộc vào a $\Leftrightarrow$ $Q(a) = 0 \ \forall a \in R$.

Điều đó xảy ra khi và chỉ khi hệ sau có nghiệm $\begin{cases} 2x - 1 = 0 \\ 2x^2 + 2x - \frac{3}{2} = 0 \\ x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 2x - 1 = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$. Vậy phương trình nghiệm đặc biệt $x = \frac{1}{2}$, $\forall a \in R$

Dùng sơ đồ Horner :

	1	$-\frac{1}{2}-2a$	$2a^2-2a+2$	$-a^2+\frac{3}{2}a-1$
$\frac{1}{2}$		$\frac{1}{2}$	$-a$	$a^2-\frac{3}{2}a+1$
	1	$-2a$	$2a^2-3a+2$	0

Suy ra

$$(1) \Leftrightarrow (x-\frac{1}{2})(x^2-2ax+2a^2-3a+2)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-\frac{1}{2}=0 \Leftrightarrow x=\frac{1}{2} \\ x^2-2ax+2a^2-3a+2=0 \quad (2) \end{array}\right.$$

Gọi $f(x) = x^2-2ax+2a^2-3a+2$; $\Delta' = -a^2+3a-2=(1-a)(a-2)$. $\Delta'>0 \Leftrightarrow 1<a<2$. (3)
Gọi $S = x_1 + x_2$, $P = x_1.x_2$. Theo Vi-ét : $P = 2a^2 - 3a + 2 > \forall x \in R$; $S = a$
Thấy rằng $P= 2a^2-3a+2>0$, $\forall a \in R$ => Các nghiệm của (2) luôn cùng dấu
Từ (3) => $S>1$. Bởi vậy :
Phương trình (1) có 3 nghiệm phân biệt lập thành cấp số cộng
<=> Phương trình (2) có 2 nghiệm x_1, x_2 ($x_1<x_2$) thoả mãn $x_2+\frac{1}{2}=2x_1$
<=> $2x_2+1= 4x_1 \Leftrightarrow 2(a+\sqrt{\Delta})+1=4(a-\sqrt{\Delta}) \Leftrightarrow 6\sqrt{\Delta}=2a-1 \Leftrightarrow 36\Delta=(2a-1)^2$
<=> $36(-a^2+3a-2) =4a^2-4a+1 \Leftrightarrow 40a^2-112a+73=0 \Leftrightarrow a=\frac{28 \pm 3\sqrt{6}}{20}$

(thích hợp (3))

Vậy tập hợp các giá trị phải tìm của a là $a = \frac{28 \pm 3\sqrt{6}}{20}$.

Chú ý 1: Trong thí dụ trên, ta đã sử dụng *kỹ thuật tìm nghiệm cố định*.
Chú ý 2: Bài toán tìm điều kiện để phương trình bậc 3 : $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ có các nghiệm lập thành cấp số cộng còn có các cách giải khác nữa.

§2. TRÁO ĐỔI VAI TRÒ ẨN –THAM SỐ, PHƯƠNG PHÁP HẰNG SỐ BIẾN THIÊN

Thí dụ 1
Giải và biện luận theo m số nghiệm của phương trình
$$(x^2-x+1)^2=x^3+5x^2+(5m+1)x+m^2. \quad (1)$$

Lời giải

Viết lại (1) <=> $m^2 + 5xm + 3x^3 + 2x^2 + 3x - x^4 - 1 = 0$ (2)
Xem (2) là phương trình bậc 2 đối với m.
Ta có $\Delta_m = 4x^4 - 12x^3 + 17x^2 - 12x + 4 = (2x^2 - 3x + 2)^2$
Các nghiệm của (2) là: $m_1 = x^2 - 4x + 1$; $m_2 = -x^2 - x - 1$

Do vậy (2) <=> $\left[\begin{array}{l} m = x^2 - 4x + 1 \\ m = -x^2 - x - 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 - 4x + 1 - m = 0 \quad (3) \\ x^2 + x + 1 + m = 0 \quad (4) \end{array}\right.$

$\Delta'_1 = 4 - 1 + m = m + 3$; $\Delta_2 = 1 - 4 - 4m = -4m - 3$.

Các nghiệm nếu có của phương trình (3) là: $x_{1,2} = 2 \pm \sqrt{m+3}$

Các nghiệm nếu có của phương trình (4) là: $x_{1,2} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{-4m-3}}{2}$

Để ý (*): $(x^2 - 4x + 1 - m) + (x^2 + x + 1 + m) = 2x^2 - 3x + 2 = 2\left(x - \dfrac{3}{4}\right)^2 + \dfrac{7}{8} > 0, \forall x$

suy ra các phương trình (3) và (4) không có nghiệm chung.

* Nếu $m < -3$:
 - $\Delta'_1 < 0$: Phương trình (3) vô nghiệm.
 - $\Delta_2 > 0$: Phương trình (4) có hai nghiệm phân biệt $x_{1,2} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{-4m-3}}{2}$

Suy ra phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt $x_{1,2} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{-4m-3}}{2}$

* Nếu $m = -3$:
 - $\Delta'_1 = 0$: Phương trình (3) có nghiệm kép $x_1 = x_2 = 2$
 - $\Delta_2 > 0$: Phương trình (4) có hai nghiệm phân biệt $x_3 = 1$; $x_4 = -2$

Suy ra phương trình (1) có nghiệm $x = 1$; $x = \pm 2$

* Nếu $-3 < m < -\dfrac{3}{4}$:
 - $\Delta'_1 > 0$: Phương trình (3) có hai nghiệm phân biệt $x_{1,2} = 2 \pm \sqrt{m+3}$
 - $\Delta_2 > 0$: Phương trình (4) có hai nghiệm phân biệt $x_{3,4} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{-4m-3}}{2}$

Suy ra phương trình (1) có bốn nghiệm phân biệt

$$x_{1,2} = 2 \pm \sqrt{m+3}\ ;\ x_{3,4} = \frac{-1 \pm \sqrt{-4m-3}}{2}$$

* Nếu $m = -\dfrac{3}{4}$:
 - $\Delta'_1 > 0$: Phương trình có hai nghiệm phân biệt $x_1 = \dfrac{1}{2}$; $x_2 = \dfrac{7}{2}$
 - $\Delta_2 = 0$: Phương trình (4) có một nghiệm kép $x_3 = x_4 = -\dfrac{1}{2}$

Suy ra phương trình (1) có ba nghiệm phân biệt $x = \pm\dfrac{1}{2}$; $x = \dfrac{7}{2}$

* Nếu $m > -\dfrac{3}{4}$:

• $\Delta'_1 > 0$: Phương trình (3) có hai nghiệm phân biệt $x_{1,2} = 2 \pm \sqrt{m+3}$

• $\Delta_2 < 0$: Phương trình (4) vô nghiệm.

Suy ra phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt $x_{1,2} = 2 \pm \sqrt{m+3}$

Tóm lại :

* Nếu $m < -3$: Phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt $x_{1,2} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{-4m-3}}{2}$

* Nếu $m = -3$: Phương trình (1) có nghiệm $x = 1$; $x = +2$

* Nếu $-3 < m < -\dfrac{3}{4}$: Phương trình (1) có bốn nghiệm phân biệt

$$x_{1,2} = 2 \pm \sqrt{m+3} ;\ x_{3,4} = \frac{-1 \pm \sqrt{-4m-3}}{2}$$

* Nếu $m = -\dfrac{3}{4}$: Phương trình (1) có ba nghiệm phân biệt $x = \pm\dfrac{1}{2}$; $x = \dfrac{7}{2}$

* Nếu $m > -\dfrac{3}{4}$: Phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt $x_{1,2} = 2 \pm \sqrt{m+3}$

Chú ý (**)

Nếu x_0 là nghiệm chung của các phương trình $f(x)= 0$ và $h(x)=0$ thì x_0 ắt là nghiệm của phương trình $p.f(x)+q.h(x)=0,\ \forall(p,q)\in R$.

Nói khác đi $p.f(x) + q.h(x) \neq 0$, với $\forall x \in \mathcal{D}$, $p^2 + q^2 \neq 0 \in R$ là điều kiện đủ để các phương trình $f(x)=0$ và $h(x)=0$ không có nghiệm chung trên $\mathcal{D}$.

Thí dụ 2.
Giải và biện luận theo a số nghiệm của phương trình
$2x^4 - 4x^3 + (4-a)x^2 + (a-2)x + a - a^2 = 0$ (1)

Lời giải

Viết lại (1) <=> $a^2 + (x^2 - x - 1)a - 2x^4 + 4x^3 - 4x^2 + 2x = 0$ (2)

Xem (2) là phương trình đối với ẩn a.

Sẽ có $\Delta = (x^2 - x - 1)^2 - 4(-2x^4 + 4x^3 - 4x^2 + 2x) = (3x^2 - 3x + 1)^2$

=> Các nghiệm của (2) là: $a_1 = x^2 - x + 1$; $a_2 = -2x^2 + 2x$

Do vậy (2) <=> $\left[\begin{array}{l} a = x^2 - x + 1 \\ a = -2x^2 + 2x \end{array}\right.$ <=> $\left[\begin{array}{ll} x^2 - x + 1 - a = 0 & (3) \\ 2x^2 - 2x + a = 0 & (4) \end{array}\right.$

Để ý $(x^2 - x + 1 - a) + (2x^2 - 2x + a) = 3x^2 - 3x + 1 = 3\left(x - \dfrac{1}{2}\right)^2 + \dfrac{1}{4} > 0\ \forall x \in R$

=> Hai phương trình (3) và (4) không có nghiệm chung. (5)

* *Xét phương trình* (3): $\Delta = 4a - 3$

• Nếu $a < \dfrac{3}{4}$ <=> $\Delta < 0$: Phương trình (3) vô nghiệm.

• Nếu $a = \dfrac{3}{4}$ <=> $\Delta = 0$: Phương trình (3) có nghiệm kép $x = \dfrac{1}{2}$

• Nếu $a > \frac{3}{4} \Leftrightarrow \Delta' > 0$: **Phương trình (3) có hai nghiệm phân biệt**

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{4a - 3}}{2}$$

* *Xét phương trình* **(4) : $\Delta' = 1$**

• Nếu $a < \frac{1}{2} \Leftrightarrow \Delta' > 0$: **Phương trình (4) có hai nghiệm phân biệt**

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 2a}}{2}$$

• Nếu $a = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \Delta' = 0$: **Phương trình (4) có nghiệm kép** $x = \frac{1}{2}$

• Nếu $a > \frac{1}{2} \Leftrightarrow \Delta' < 0$: **Phương trình (4) vô nghiệm**

Tóm lại, từ các kết quả trên cùng với (5) kết luận :

• Nếu $a < \frac{1}{2}$: Phương trình (1) có hai nghiệm $x = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 2a}}{2}$

• Nếu $a = \frac{1}{2}$: Phương trình (4) có nghiệm kép $x = \frac{1}{2}$

• Nếu $\frac{1}{2} < a < \frac{3}{4}$: Phương trình (1) vô nghiệm

• Nếu $a > \frac{3}{4}$: Phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt $\frac{1 \pm \sqrt{4a - 3}}{2}$

Thí dụ 3.

Với mỗi a, gọi x_a là nghiệm của phương trình

$$x^4 + 2x^2 + 2ax + a^2 + 2a + 1 = 0 \qquad (1)$$

Tìm a để x_a nhận giá trị bé nhất.

Lời giải

• x_a là nghiệm của phương trình (1) $\Leftrightarrow x_a^4 + 2x_a^2 + 2ax_a + a^2 + 2a + 1 = 0$

$\Leftrightarrow a^2 + 2(x_a + 1)a + x_a^4 + 2x_a^2 + 1 = 0$ (2)

Xem (2) là phương trình đối với ẩn a.

• Hiển nhiên (2) có nghiệm. Điều đó xảy ra khi và chỉ khi $\Delta'_a \geq 0$.

$\Leftrightarrow (x_a + 1)^2 - (x_a^4 + 2x_a^2 + 1) \geq 0 \Leftrightarrow (x_a + 1)^2 - (x_a^2 + 1)^2 \geq 0$

$\Leftrightarrow (x_a - x_a^2)(x_a^2 + x_a + 2) \geq 0 \Leftrightarrow 0 \leq x_a \leq 1 \Rightarrow \min x_a = 0.$

Thay $x_a = 0$ vào (1) có $a^2 + 2a + 1 = 0 \Leftrightarrow a = -1$

Vậy tập hợp các giá trị phải tìm của a có một giá trị duy nhất là $a = -1$.

Thí dụ 4.

Giải phương trình $x^6 - 7x^3 + \sqrt{6} = 0$ ( )

Lời giải

• x_0 là nghiệm của phương trình (1) <=> $x_0^6 - 7x_0^2 + \sqrt{6} = 0$

<=> $x_0^6 - (6+1)x_0^2 + \sqrt{6} = 0$ <=> $x_0^2 6 - \sqrt{6} - x_0^6 + x_0^2 = 0$ => $\sqrt{6}$ là nghiệm của phương trình sau với *ẩn là a* : $x_0^2 a^2 - a - x_0^6 + x_0^2 = 0$ (2)

Thấy rằng (1) không có nghiệm x=0 => (2) là phương trình bậc hai đối với a và $\Delta = 1 - 4x_0^2(-x_0^6 + x_0^2) = 4x_0^8 - 4x_0^4 + 1 = (2x_0^4 - 1)^2$

=> Các nghiệm của phương trình (2) là $a_1 = x_0^2$; $a_2 = \frac{1 - x_0^4}{x_0^2}$.

Suy ra (2) <=> $\left[\begin{array}{l} a = a_1 \\ a = a_2 \end{array}\right.$ <=> $\left[\begin{array}{l} a = x_0^2 \\ a = \frac{1 - x_0^4}{x_0^2} \end{array}\right.$ <=> $\left[\begin{array}{l} a = x_0^2 \\ x_0^4 + ax_0^2 - 1 = 0 \end{array}\right.$

<=> $\left[\begin{array}{l} x_0^2 = a \\ x_0^2 = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 + 4}}{2} \end{array}\right.$ <=> $\left[\begin{array}{l} x_0^2 = \sqrt{6} \\ x_0^2 = \frac{-\sqrt{6} \pm \sqrt{10}}{2} \end{array}\right.$ <=> $\left[\begin{array}{l} x_0 = \pm\sqrt[4]{6} \\ x_0 = \pm\sqrt{\frac{\sqrt{10} - \sqrt{6}}{2}} \end{array}\right.$

Vậy của phương trình đã cho có tập nghiệm là $\left[\begin{array}{l} x = \pm\sqrt[4]{6} \\ x = \pm\sqrt{\frac{\sqrt{10} - \sqrt{6}}{2}} \end{array}\right.$

Lời bình

Phương pháp giải giải thí dụ trên được gọi là phương pháp hằng số biến thiên. Các bạn theo dõi tiếp thí dụ 5 và 6 tiếp theo dưới đây.

Thí dụ 5

Giải phương trình $x^2 = 2 + \sqrt{2 - x}$ (1)

Lời giải

Điều kiện : $\begin{cases} 2 - x \geq 0 \\ x^2 < 2 \end{cases}$ <=> $\begin{cases} x < -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} < x \leq 2 \end{cases}$ (2)

• x_0 là nghiệm của phương trình <=> $x_0^2 = 2 + \sqrt{2 - x_0}$ <=> $(x_0^2 - 2)^2 = 2 - x_0$

=> 2 là nghiệm của phương trình sau với *ẩn là a* : $(x_0^2 - a)^2 = a - x_0$

<=> $x_0^4 - 2x_0^2 + a^2 = a - x_0$ <=> $a^2 - (2x_0^2 + 1) + x_0^4 + x_0 = 0$ (3)

Ta có $(\Delta) = (2x_0^2 + 1)^2 - 4(x_0^4 + x_0) = (2x_0 - 1)^2 \geq 0, \forall x_0$ suy ra

(3) <=> $\left[\begin{array}{l} a_1 = \frac{2x_0^2 + 1 + 2x_0 - 1}{2} = x_0^2 + x_0 \\ a_2 = \frac{2x_0^2 + 1 - 2x_0 + 1}{2} = x_0^2 + x_0 + 1 \end{array}\right.$

Với $a_1 = 2$ có $x_0^2 + x_0 = 2 \Leftrightarrow x_0^2 + x_0 - 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \text{ (loại do (2))} \\ x = -2 \end{array}\right. \Leftrightarrow x = -2.$ (4)

Với $a_2 = 2$ có $x_0^2 + x_0 + 1 = 2 \Leftrightarrow x_0^2 + x_0 - 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\dfrac{\sqrt{5}+1}{2} \text{ (loại do (2))} \\ x = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2} \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}.$ (5)

Từ (4), (5) kết luận phương trình có hai nghiệm là $x = -2$ và $x = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$.

Thí dụ 6

Giải phương trình $x + \sqrt{3 + \sqrt{x}} = 3$ (1)

Lời giải

Điều kiện : $0 < x \le 1$ (2)

Với điều kiện đó ta có (1) $\Leftrightarrow 3 - x = \sqrt{3 + \sqrt{x}} \Leftrightarrow (3-x)^2 = 3 + \sqrt{x}$ (3)

Đặt 3 = a, phương trình (3) được viết $(a - x)^2 = a\sqrt{x}$

$\Leftrightarrow a^2 - (2x + 1)a + (x^2 - \sqrt{x}) = 0$ (4)

Xem (4) là phương trình bậc 2 đối với a.

$\Delta_a = (2x + 1)^2 - 4(x^2 = \sqrt{x}) = (2\sqrt{x} + 1)^2$, $a_1 = x + \sqrt{x} + 1$, $a_2 = x - \sqrt{x}$

Do vậy (4) $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = a_1 \\ a = a_2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = x^2 + x + 1 \\ a = x - \sqrt{x} \end{array}\right.$ (5) Thay a = 3 ta có

$(5) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3 = x^2 + x + 1 \\ 3 = x - \sqrt{x} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 + x - 2 = 0 \\ x - \sqrt{x} - 3 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{x} = 1 \\ \sqrt{x} = -2 \\ \sqrt{x} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{13}}{2} \end{array}\right.$

Kết hợp với điều kiện (2) có $x=1$. Đó là nghiệm duy nhất của phương trình đã cho.

Chú ý : Các phương trình trong hai Thí dụ 5, Thí dụ 6 còn có cách bằng cách đặt ẩn phụ được trình bày trong §4 chương V: *Phương trình, bất phương trình vô tỉ.* Riêng Thí dụ 6 bạn có thể đoán nghiệm rồi chứng minh đó là nghiệm duy nhất .

BÀI TẬP

Bài 1. Cho $f(x) = x^4 + 2x^3 - 2(m + 4)x^2 - 2(m - 2)x + (m - 2)^2$

1) Giải phương trình $f(x) = 0$ khi $m = -2$

2) Tìm m biết rằng $f(x) > 0, \forall x \in R$

Bài 2 Giải và biện luận theo a số nghiệm của phương trình

$$x^4 - 10x^3 - 2(a - 11)x^2 + 2(5a + 6)x + 2a + a^2 = 0$$

§3. ĐẶT ẨN PHỤ ĐƯA VỀ PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI

- *Phương trình trùng phương :* $ax^4+bx^2+c=0$
- *Phương trình* $(x+a)^4+(x+b)^4=c$
- *Phương trình hồi quy :* $ax^4+bx^3+cx^2\pm kbx+k^2a=0$
  [Phương trình $(ax^2+bx+ka)(a'x^2+b'x+ka')+px^3+qx^2+kpx = 0$ *]*
- *Phương trình* $(ax+b)^2(a'x+b')^2+[(a+a')x+(b+b')]^2+c = 0$
- *Phương trình* $a(ax^2+bx+c)^2+b(ax^2+bx+c)+c=0$
- *Phương trình* $x^4=ax^2+bx+c$

I. Phương trình trùng phương : $ax^4+bx^2+c = 0$ $(a\neq 0)$

CÁCH GIẢI

Đặt ẩn phụ $x^2=t\geq 0$ đưa về phương trình bậc hai $at^2+bt+c=0$

Thí ụ 1.

ho phương trình $x^4-2mx^2+2m-1=0$ (1)

Tìm m để phương trình có :

) Đúng một nghiệm dương; b) Đúng ba nghiệm.

Lời giải

Đặt $x^2=t\geq 0$, phương trình trở thành $t^2-2mt+2m-1=0$ (2)

Để , với mỗi $t>0$ phương trình $x^2=t$ cho hai nghiệm đối nhau $x=\pm\sqrt{t}$

Bởi vậy :

- 1) Phương trình (1) có đúng một nghiệm dương

$\Leftrightarrow$ hương trình (2) có hai nghiệm $t_{1,2}$ thoả mãn $\left[\begin{array}{l} t_1<0<t_2 \\ 0=t_1<t_2 \end{array}\right.$

Trường hợp 1: $t_1<0<t_2 \Leftrightarrow a.c<0 \Leftrightarrow 2m-1<0 \Leftrightarrow m<\dfrac{1}{2}$ (3-1)

Trường hợp 2: $0=t_1<t_2 \Leftrightarrow \begin{cases} c=0 \\ S>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2m-1=0 \\ 2m>0 \end{cases} \Leftrightarrow m=\dfrac{1}{2}$ (3-2)

Từ (3-1), (3-2) kết luận :

Phương trình (1) có không quá một nghiệm dương $\Leftrightarrow m\leq\dfrac{1}{2}$

- 2) Phương trình (1) có đúng ba nghiệm $\Leftrightarrow$ Phương trình (2) có hai nghiệm $t_{1,2}$ thoả mãn $0=t_1<t_2 \Leftrightarrow \begin{cases} 2m-1=0 \\ 2m>0 \end{cases} \Leftrightarrow m=\dfrac{1}{2}$

Chú ý.

Nếu các số x_1, x_2, x_3 $(x_1 < x_2 < x_3)$ thoả mãn $x_1 - x_2 = x_2 - x_3$ người ta nói các số x_1, x_2, x_3 lập thành cấp số cộng.

Thí dụ 2.

Tìm m để phương trình có các nghiệm lập thành cấp số cộng :

$$x^4 - 2(m + 1)x^2 + 2m + 1 = 0 \qquad (1)$$

Lời giải

Đặt $x^2 = t \geq 0$, phương trình trở thành $t^2 - 2(m + 1)t + 2m + 1 = 0$ (2)

Để ý, với mỗi $t > 0$, phương trình $x^2 = t$ cho 2 nghiệm đối nhau $x = \pm\sqrt{t}$

Bởi vậy phương trình (1) có các nghiệm lập thành cấp số cộng trong 2 trường hợp sau đây.

* *Trường hợp 1* : Phương trình (2) có hai nghiệm $t_{1,2}$ thoả mãn $0 = t_1 < t_2$

Điều ấy xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} 2m + 1 = 0 \\ m + 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = -\dfrac{1}{2}$ (3)

* *Trường hợp 2* : Phương trình (2) có hai nghiệm $t_{1,2}$ thoả mãn : $t_2 = 9t_1 > 0$.

\+ Phương trình (2) có hai nghiệm $t_2 > t_1 > 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ 2m + 1 > 0 \\ m + 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 > 0 \\ m > -\dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{1}{2} < m \neq 0 \qquad (4)$$

Khi đó các nghiệm của phương trình (1) là

$$x_1 = -\sqrt{t_2}\ ;\ x_2 = -\sqrt{t_1}\ ;\ x_3 = \sqrt{t_1}\ ;\ x_4 = \sqrt{t_2}$$

\+ Các nghiệm của phương trình (1) lập thành cấp số cộng

$\Leftrightarrow x_4 - x_3 = x_3 - x_2 = x_2 - x_1$ hay $\sqrt{t_2} - \sqrt{t_1} = \sqrt{t_2} - \sqrt{t_1} = \sqrt{t_2} - \sqrt{t_1}$

$\Leftrightarrow \sqrt{t_2} = 3\sqrt{t_1} \Leftrightarrow t_2 = 9t_1$ (5)

Từ (5) $\Rightarrow \begin{cases} t_1 + t_2 = 10t_1 \\ t_1t_2 = 9t_1^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2(m + 1) = 10t_1 \\ 2m + 1 = 9t_1^2 \end{cases} \Rightarrow 9.4(m + 1)^2 = 100(2m + 1)$

$\Leftrightarrow 9(m^2 + 2m + 1) = 25(2m + 1) \Leftrightarrow 9m^2 - 32m - 16 = 0 \Leftrightarrow \left\{ m = 4; m = -\dfrac{4}{9} \right\}$

(thích hợp) (6)

- Từ (3), (4), (6) ta có tập hợp các giá trị phải tìm của m là

$$\left\{ m = -\frac{1}{2}\ ;\ m = 4\ ;\ m = -\frac{4}{9} \right\}$$

Thí dụ 3.

Chứng minh điều kiện cần để phương trình $ax^4 + bx^2 + c = 0$ $(a \neq 0)$ (1)

có bốn nghiệm lập thành cấp số cộng là $9b^2 = 100ac$ (2)

Lời giải

Đặt $x^2 = t > 0$, phương trình (1) trở thành $at^2 + bt + c = 0$ (3)

Để ý : với mỗi $t > 0$, phương trình $x^2 = t$ cho 2 nghiệm đối nhau $x = \pm\sqrt{t}$.

• Bởi vậy phương trình (1) có bốn nghiệm <> Phương trình (3) có hai nghiệm t_1, t_2 thoả $t_2 > t_1 > 0$.

Khi đó các nghiệm của (1) sẽ là $x_1 = -\sqrt{t_2}$; $x_2 = -\sqrt{t_1}$; $x_3 = \sqrt{t_1}$; $x_4 = \sqrt{t_2}$

• Bốn nghiệm của (1) lập thành cấp số cộng <> $x_4 - x_3 = x_3 - x_2 = x_2 - x_1$

<> $\sqrt{t_2} - \sqrt{t_1} = 2\sqrt{t_1} \Leftrightarrow \sqrt{t_2} = 3\sqrt{t_1} \Leftrightarrow t_2 = 9t_1$ (4)

• Từ (4) $\Rightarrow \begin{cases} t_1 + t_2 = 10t_1 \\ t_1 t_2 = 9t_1^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\dfrac{b}{a} = 10t_1 \\ \dfrac{c}{a} = 9t_1^2 \end{cases} \Rightarrow 9b^2 = 100ac$ (đpcm)

Chú ý: Còn nhớ cần và đủ để phương trình (3) có hai nghiệm t_1, t_2 thoả mãn $t_2 = kt_1$ là $kb^2 = (k + 1)ac$. Với $k = 9$ ta có (2) : $9b^2 = 100ac$.

II. Phương trình $(x+a)^4+(x+b)^4=c$ (1)

CÁCH GIẢI

Đặt ẩn phụ $t = \dfrac{x + a + x + b}{2} \Rightarrow \begin{cases} x + a = t + \dfrac{a-b}{2} \\ x + b = t - \dfrac{a-b}{2} \end{cases}$

thay vào (1) có $2t^4 + 12\left(\dfrac{a-b}{2}\right)^2 t^2 + 2\left(\dfrac{a-b}{2}\right)^4 - c = 0$ (2)

Phương trình (2) là phương trình trùng phương đã biết cách giải.

Thí dụ 4.
Giải phương trình $(x + 3)^4 + (x + 5)^4 = 2$ (1)

Lời giải

Đặt $t = \dfrac{x + 3 + x + 5}{2} = x+4 \Rightarrow \begin{cases} x + 3 = t - 1 \\ x + 5 = t + 1 \end{cases}$ Phương trình (1) trở thành

$(t - 1)^4 + (t + 1)^4 = 2 \Leftrightarrow 2t^4 + 12t^2 + 2 = 2 \Leftrightarrow t^2(t^2 + 6) = 0 \Leftrightarrow t = 0$.

Từ đó có $x + 4 = 0 \Leftrightarrow x = -4$.

Thí dụ 5.

Giải và biện luận hệ phương trình *(m là tham số)* $\begin{cases} x + y = m & (1) \\ x^4 + y^4 = m^4 & (2) \end{cases}$

Lời giải

Ta có (1) $\Leftrightarrow$ $y = m - x$, thế vào phương trình (2) có : $x^4+(x-m)^4=m^4$ (3)

Đặt $t = \dfrac{x + x - m}{2} = x - \dfrac{m}{2} \Rightarrow x = t + \dfrac{m}{2}$ (4)

Phương trình (3) trở thành :

$$\left(t+\frac{m}{2}\right)^4+\left(t-\frac{m}{2}\right)^4=m^4 \Leftrightarrow 2t^4+3m^2t^2-7\frac{m^4}{8}=0 \quad (5)$$

$\Delta = 16m^4 \geq 0, \forall m$.

Trường hợp 1: $m = 0$, phương trình (5) môt nghiệm duy nhất $t = 0$

Suy ra hệ có một nghiệm duy nhất $x = y = 0$. (6)

Trường hợp 2: $m \neq 0$, ta có (5) $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t^2 = -\dfrac{7m^2}{4} \text{ (loại)} \\ t^2 = \dfrac{m^2}{4} \text{ (thích hợp)}\end{array}\right. \Rightarrow t = \pm\dfrac{m}{2}$

Thay vào (5) có $x = 0$, $x = m$.

Từ đó suy ra khi $m \neq 0$, hệ có hai nghiệm $(x = 0; y = m)$ hoặc $(x= m; y = 0)$. (7)

Trong (7), khi $m = 0$ cho ta kết quả (6). Bởi thế từ (6) và (7) cho kết luận :

Tập hợp nghiệm của phương trình là $\{(x = 0; y = m), (x = m; y = 0)\}$ $\forall m \in R$.

III. Phương trình hồi quy

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 \pm kbx + k^2a = 0 \quad (ka \neq 0) \quad (1)$$

CÁCH GIẢI

Thấy rằng phương trình không có nghiệm $x = 0$ nên chia hai vế cho $x^2 \neq 0$,

ta có (1) $\Leftrightarrow ax^2 + bx^2 + c \pm k\dfrac{b}{x} + k^2\dfrac{a}{x^2} = 0 \Leftrightarrow a(x^2 + \dfrac{k^2}{x^2}) + b(x \pm \dfrac{k}{x}) + c = 0$ (2)

Đặt $t = x \pm \dfrac{k}{x}$, khi đó $t^2 = x^2 + \dfrac{k^2}{x^2} \pm 2k \Rightarrow x^2 + \dfrac{k^2}{x^2} = t^2 \pm 2k$.

Phương trình (2) trở thành $at^2 + bt + c - 2ka = 0$.

Tiếp tục giải phương trình này theo k.

khi b= 0, phương trình hồi quy suy biến thành phương trình trùng phương đặc biệt)

Thí dụ 6.

Giải phương trình $2x^4 + 3x^3 - 16x^2 + 3x + 2 = 0$ (1)

Lời giải

Thấy rằng phương trình không có nghiệm $x = 0$.

Chia hai vế của phương trình cho $x^2 > 0$, ta có :

$$(1) \Leftrightarrow 2x^2 + 3x - 16 + \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2} = 0 \Leftrightarrow 2\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+3\left(x+\frac{1}{x}\right)-16=0 \quad (2)$$

Đặt $t = x + \frac{1}{x}$, $|t|>2$ (3), suy ra $t^2 = x^2 + \frac{1}{x^2} + 2 \Leftrightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} = t^2 - 2$.

Phương trình (2) trở thành $2t^2 + 3t - 20 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 4 \\ t = -\frac{5}{2} \end{array}\right.$ *(thích hợp (3))*

Với $t = 4$ có $x + \frac{1}{x} = 4 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = 2 \pm \sqrt{3}$ (4)

Với $t = -\frac{5}{2}$ có $x + \frac{1}{x} = -\frac{5}{2} \Leftrightarrow 2x^2 + 5x + 2 = 0 \Leftrightarrow \{x = -2; x = -\frac{1}{2}\}$ (5)

Từ (4), (5) suy ra tập **hợp nghiệm của phương** trình (1) là :

$$\{x = 2 \pm \sqrt{3}; x = -2; x = -\frac{1}{2}\}$$

> **Thí dụ 7.**
> Cho phương trình $x^4 - mx^3 - (2m+1)x^2 + mx + 1 = 0$ (1)
> Tìm m để phương trình (1) **có hai nghiệm phân biệt** và lớn hơn 1.

Lời giải

Thấy rằng phương trình **không có nghiệm** $x = 0$. **Chia** hai vế cho x^2 ta có:

$(1) \Leftrightarrow x^2 - mx - (2m+1) + \frac{m}{x} + \frac{1}{x^2} = 0 \Leftrightarrow (x^2 + \frac{1}{x^2}) - m(x - \frac{1}{x}) - (2m+1) = 0$ (2)

Đặt $t = x - \frac{1}{x}$ (3), suy ra : $\left|\begin{array}{ll} x^2 - tx - 1 = 0 & (4) \\ t^2 = x^2 + \frac{1}{x^2} - 2 \Leftrightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} = t^2 + 2 & (5) \end{array}\right.$

phương trình (2) trở **thành** : $t^2 - mt - 2m + 1 = 0$ (6)

Gọi vế trái của (4) **là** $f(x)$. **Để ý** $ac = -1 < 0, \forall t \in R \Rightarrow$ phương trình (4) luôn có nghiệm hai nghiệm trái **dấu**. **Bởi vậy, phương trình (4)** có nghiệm $x>1$ khi và chỉ khi $1.f(1) < 0 \Leftrightarrow -t < 0 \Leftrightarrow t > 0$.

• Vì thế, **phương trình (1) có hai nghiệm lớn hơn** 1 $\Leftrightarrow$ phương trình (6) có hai nghiệm dương **phân biệt** :

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ 1 - 2m > 0 \\ \frac{m}{2} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 + 8m - 4 > 0 \\ m < \frac{1}{2} \\ m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} m < -4 - 2\sqrt{5} \\ m > -4 + 2\sqrt{5} \end{array}\right. \\ 0 < m < \frac{1}{2} \end{cases}$$

$\Leftrightarrow 2\sqrt{5} - 4 < m < \frac{1}{2}$

Thí dụ 8.

[Phương trình $(ax^2+bx+ka)(a'x^2+b'x+ka')+px^3+qx^2+kpx=0$; $kaa' \neq 0$]

Giải các phương trình

a) $(x-1)(x-2)(x-4)(x-8)=70x^2$ b) $(x^2+3x+\frac{1}{4})(x^2-x+\frac{1}{4})=12x^2$

Lời giải

a) Ta có $(x-1)(x-2)(x-4)(x-8)=70x^2 \Leftrightarrow [(x-1)(x-8)][(x-2)(x-4)]=70x^2$

$\Leftrightarrow (x^2-9x+8)(x^2-6x+8)=70x^2$ (1)

Thấy rằng phương trình không có nghiệm x = 0. Chia hai vế cho $x^2>0$ có :

(1) $\Leftrightarrow \left(x+\frac{8}{x}-9\right)\left(x+\frac{8}{x}-6\right)=70$ (3), đặt $t=x+\frac{8}{x}$ (2)

Sẽ có $|t|=\left|x+\frac{8}{x}\right|=|x|+\frac{8}{|x|}\geq 4\sqrt{2}$ (3)

Phương trình (3) trở thành $(t-9)(t-6)=70 \Leftrightarrow t^2-15t-16=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=-1 \\ t=16 \end{array}\right.$

+ Giá trị $t=-1$ loại, do không thoả điều kiện (5).

+ Với t=16, thay vào (4) có $16=x+\frac{8}{x} \Leftrightarrow x^2-16x+8=0 \Leftrightarrow x=8\pm 2\sqrt{14}$

Vậy phương trình có 2 nghiệm : $x=8\pm 2\sqrt{14}$

b) Xem phương trình $(x^2+3x+\frac{1}{4})(x^2-x+\frac{1}{4})=12x^2$ (1)

Thấy rằng phương trình không có nghiệm x=0. Chia hai vế cho $x^2>0$ có :

(1) $\Leftrightarrow \left(x+\frac{1}{4x}+3\right)\left(x+\frac{1}{4x}-1\right)=12$ (2). Đặt $x+\frac{1}{4x}=t$ (3)

Điều kiện : $|t|\geq 1$. Phương trình (1) trở thành $(t+3)(t-1)=12$

$\Leftrightarrow t^2+2t-15=0 \Leftrightarrow \{t=3; t=-5\}$ (thoả điều kiện $|t|\geq 1$). Thay vào (2) :

+ Với $t=3$, $x+\frac{1}{4x}=3 \Leftrightarrow 4x^2-12x+1=0 \Leftrightarrow x=\frac{3\pm 2\sqrt{2}}{2}$

+ Với $t=-5$, $x+\frac{1}{4x}=-5 \Leftrightarrow 4x^2+20x+1=0 \Leftrightarrow x=\frac{-5\pm 2\sqrt{6}}{2}$

Vậy phương trình có 4 nghiệm : $x=\frac{3\pm 2\sqrt{2}}{2}$; $x=\frac{-5\pm 2\sqrt{6}}{2}$.

Thí dụ 9.

Giải các phương trình :

a) $(2x^2-3x-18)(3x^2+2x-27)=41x^3+10x^2-369x$ (1*)

b) $\frac{7x^3-101x^2+42x}{2x^2+x+12}=x^2-11x+6$ (2*)

Lời giải

a) Thấy rằng $x = 0$ không phải là nghiệm. Chia các vế cho $x^2 > 0$ có:

$$(1^*) \Leftrightarrow \left(2x - 3 - \frac{18}{x}\right)\left(3x + 2 - \frac{27}{x}\right) = 41x + 10 - \frac{369}{x}$$

$$\Leftrightarrow \left[2\left(x - \frac{9}{x}\right) - 3\right]\left[3\left(x - \frac{9}{x}\right) + 2\right] = 41\left(x - \frac{9}{x}\right) + 10 \qquad (2)$$

Đặt $t = x - \dfrac{9}{x}$ (3), phương trình (2) trở thành $(2t - 3)(3t + 2) = 41t + 10$

$$\Leftrightarrow 3t^2 - 23t - 8 = 0 \Leftrightarrow \left\{t = 8; t = -\frac{1}{3}\right\}$$

+ Thay $t = 8$ vào (3) có $x - \dfrac{9}{x} = 8 \Leftrightarrow x^2 - 8x - 9 = 0 \Leftrightarrow \{x = -1; x = 9\}$ (4)

+ Thay $t = -\dfrac{1}{3}$ vào (3) có $x - \dfrac{9}{x} = -\dfrac{1}{3} \Leftrightarrow 3x^2 + x - 27 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{325}}{6}$ (5)

Vậy phương trình có tập nghiệm là $\left\{x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{325}}{6}; x = -1; x = 9\right\}$

b) Viết lại $(2^*) \Leftrightarrow (2x^2 + x + 12)(x^2 - 11x + 6) = 7x^3 + 101x^2 + 42x$

Thấy rằng phương trình không có nghiệm $x=0$. Với $x \neq 0$, chia hai vế cho x^2 ta có

$$(2^*) \Leftrightarrow \left(2x + 1 + \frac{12}{x}\right)\left(x - 11 + \frac{6}{x}\right) = 7x - 101 + \frac{42}{x}$$

$$\Leftrightarrow \left[2\left(x + \frac{6}{x}\right) + 1\right]\left[\left(x + \frac{6}{x}\right) - 11\right] = 7\left(x + \frac{6}{x}\right) - 101 \qquad (5)$$

Đặt $t = x + \dfrac{6}{x}$, $|t| \geq 2\sqrt{6}$ (6). Phương trình (5) trở thành $(2t+1)(t-11) = 7t - 101$

$$\Leftrightarrow 2t^2 - 28t + 90 = 0 \Leftrightarrow t^2 - 14t + 45 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 5 \\ t = 9 \end{array}\right. \text{ (thích hợp (6))}$$

+ Với $t = 5$, có $x + \dfrac{6}{x} = 5 \Leftrightarrow x^2 - 5x + 6 = 0 \Leftrightarrow \{x = 2; x = 3\}$

+ Với $t = 9$, có $x + \dfrac{6}{x} = 9 \Leftrightarrow x^2 - 9x + 6 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{9 \pm \sqrt{57}}{2}$

Vậy phương trình có tập nghiệm là : $\left\{x = 2; x = 3; x = \dfrac{9 \pm \sqrt{57}}{2}\right\}$

Thí dụ 10.

Giải các phương trình : $x^2 - x + 1 = \sqrt{\dfrac{x^2 + x}{2}}$ (1)

Lời giải

Điều kiện $x^3 + x \geq 0$ (2)

Bình phương hai vế của (1) ta có : $2(x^2 - x + 1)^2 = x^3 + x$ (3)

Thấy rằng phương trình không có nghiệm x = 0.

Với $x \neq 0$, chia hai vế cho $x^2 > 0$ ta có (3) $\Leftrightarrow 2\left(x + \frac{1}{x} - 1\right)^2 = x + \frac{1}{x}$ (4)

Đặt $t = x + \frac{1}{x}$, $|t| \geq 2$ (10) Phương trình (9) trở thành $2(t - 1)^2 = t$

$$\Leftrightarrow 2t^2 - 5t + 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 2 \\ t = \frac{1}{2} \text{ (loại do (2))} \end{array}\right. \Leftrightarrow t = 2.$$

Với t = 2 có $x + \frac{1}{x} = 2 \Leftrightarrow (x - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 1$ (thích hợp (7)).

Vậy phương trình có 1 nghiệm duy nhất là x = 1

Thí dụ 11.

Tìm m phương trình sau để có nghiệm

$$\left(2x^2 - mx + \frac{1}{2}\right)\left[x^2 + (m+1)x + \frac{1}{4}\right] = mx^2 \quad (1)$$

Lời giải

Thấy rằng phương trình không có nghiệm x = 0. Chia hai vế cho $x^2 > 0$ có :

$$(1) \Leftrightarrow \left(2x - m + \frac{1}{2x}\right)\left[x + (m+1) + \frac{1}{4x}\right] = m \quad (2)$$

Đặt $x + \frac{1}{4x} = t, |t| \geq 1$. Phương trình (2) trở thành $(2t - m)(t + m + 1) = m$

$\Leftrightarrow 2t^2 + (m + 2)t - m(m + 2) = 0$ (3)

Gọi $f(t) = 2t^2 + (m + 2)t - m(m + 2)$; $\Delta = (m + 2)^2 + 8m(m + 2) = (m+2)(9m+2)$

Phương trình (2) có nghiệm khi và chỉ khi phương trình (3) có nghiệm t, thoả $|t| \geq 1$

Ta giải bằng phương pháp gián tiếp.

Phương trình (3) không có nghiệm thoả $|t| \geq 1$ trong hai trường hợp sau :

- Phương trình (3) vô nghiệm $\Leftrightarrow \Delta < 0 \Leftrightarrow (m+2)(2+9m) < 0 \Leftrightarrow -2 < m < -\frac{2}{9}$ (4)
- Cả 2 nghiệm của phương trình (3) đều thuộc (−1; 1)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta \geq 0 \\ f(1) > 0 \\ f(-1) > 0 \\ -1 < \frac{S}{2} < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \notin \left(-2; -\frac{2}{9}\right) \\ 4 - m - m^2 > 0 \\ -m(m+3) > 0 \\ -1 < -\frac{m+2}{4} < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \notin \left(-2; -\frac{2}{9}\right) \\ \frac{-1 - \sqrt{17}}{2} < m < \frac{-1 + \sqrt{17}}{2} \\ -3 < m < 0 \\ -6 < m < 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \dfrac{-1-\sqrt{17}}{2} < m \le -2 \\ -\dfrac{2}{9} < m < 0 \end{array}\right. \qquad (5)$$



Từ (4), (5) suy ra phương trình (3) không có nghiệm thoả $|t| \ge 1$ khi và chỉ khi

$$-\frac{1+\sqrt{17}}{2} < m < 0$$

♦ Từ đó suy ra tập hợp các giá trị phải tìm của m là: $\left[\begin{array}{l} m \le -\dfrac{1+\sqrt{17}}{2} \\ m \ge 0 \end{array}\right.$

Thí dụ 12.

Cho $f(x) = (x^2 - 2mx + 1)(x^2 + 3x + 1) + 2(m + 1)x^2$. Tìm m để

a) $f(x) = 0$ có không ít hơn hai nghiệm dương phân biệt.

b) $f(x) \ge 0, \forall x$

Lời giải

a) Thấy rằng $x = 0$ không phải là nghiệm của $f(x) = 0$. Bởi vậy, chia hai vế cho $x^2 > 0$, ta có $f(x) = 0 \Leftrightarrow \left(x + \dfrac{1}{x} - 2m\right)\left(x + \dfrac{1}{x} + 3\right) + 2(m + 1) = 0$ (1)

Đặt $t = x + \dfrac{1}{x}$, $|t| \ge 2$, Phương trình (1) trở thành $(t - 2m)(t + 3) + 2(m + 1) = 0$

$\Leftrightarrow t^2 + (3 - 2m)t + 2 - 4m = 0$ (2)

Gọi $h(t) = (t - 2m)(t + 3) + 2(m + 1)$

• Xem phương trình $t = x + \dfrac{1}{x} \Rightarrow x^2 - tx + 1 = 0$ (3)

* Với $|t| = 2$, phương trình (3) có các nghiệm kép cùng dấu. (4)

* $\forall |t| > 2$, phương trình (3) luôn có 2 nghiệm phân biệt cùng dấu. (5)

* Lại có $h(-2) = 0\ \forall m$, nên $h(t) = (t + 2)(t - 2m + 1)$ (6)

• Từ (4), (5), (6) $\Rightarrow$ Phương trình đã cho có không ít hơn hai nghiệm dương

$\Leftrightarrow$ Phương trình (2) có nghiệm $t > 2 \Leftrightarrow h(2) < 0 \Leftrightarrow 12 - 8m < 0 \Leftrightarrow m > \dfrac{3}{2}$

b) • Khi $x = 0$, $f(0) = 1 > 0\ \forall m$.

• $\forall x \ne 0$, ta có $f(x) = x^2.h(t)$

Bởi vậy $f(x) \ge 0, \forall x \Leftrightarrow h(t) \ge 0, \forall |t| \ge 2$ (7)

Do (6) nên (7) $\Leftrightarrow -2 \le 2m - 1 \le 2 \Leftrightarrow -\dfrac{1}{2} \le m \le \dfrac{3}{2}$



Thí dụ 13. *(Phương trình* $\alpha x^2+\beta x+\alpha=\sqrt{px^4+qx^2+p}$ *)*

Giải phương trình $x^2+3x+1=\sqrt{x^4+x^2+1}$ (1)

Lời giải

Thấy rằng $x=0$ là một nghiệm của phương trình (1)

Với $x\neq 0$, chia hai vế của (1) cho x, có (1) $\Leftrightarrow x+\frac{1}{x}+3=\pm\sqrt{x^2+\frac{1}{x^2}+1}$. (2)

Đặt $t=x+\frac{1}{x}$; $|t|\geq 2 \Rightarrow t^2-2=x^2+\frac{1}{x^2}$, phương trình (2) trở thành

$t+3=\pm\sqrt{t^2-1} \Leftrightarrow (t+3)^2=t^2-1 \Leftrightarrow t=-\frac{5}{3}$ (loại)

$\Rightarrow$ Phương trình (2) vô nghiệm. (3)
Từ (1), (3) , kết luận x=0 là nghiệm duy nhất của phương trình đã cho.

Chú ý

Phương trình dạng $\alpha x^2+\beta x+\alpha=\sqrt{px^4+qx^2+p}$ (*) là một *biến thể đặc biệt* của phương trình hồi quy bậc 4 : $ax^4+bx^3+cx^2\pm kbx+k^2a=0$ $(ka\neq 0)$.

Chỉ khác là (*) có nghiệm $x=0$, nếu $p=\alpha^2$.

BÀI TẬP

Bài 1 Giải các phương trình

1) $(x^2+3x+\frac{1}{4})(x^2-x+\frac{1}{4})=12x^2$ 2) $x^4-3x^3-2x^2+6x+4=0$

3) $x^4+6x^3+4x^2-12x+4=0$ 4) $x^4+x^3-6x^2-2x+4=0$

Bài 2. Cho $f(x)=(2x^2+mx+2)(x^2+3x+1)+(\frac{m}{2}-10)x^2$. Tìm m để

1) $f(x)=0$ có không ít hơn hai nghiệm dương phân biệt.
2) $f(x)\geq 0\ \forall x$

Bài 3. Tìm m để phương trình $f(x)=0$ có nghiệm

$f(x)=\left(x^2-mx+4\right)\left[x^2+(m+1)x+4\right]=x^2$ (1)

Hướng dẫn: Chia cho x^2, rồi đặt $x+\frac{4}{x}=t$, $|t|\geq 4$. Phương trình (1) trở thành f(t)

$t^2+t-m(m+1)-1=0$ (2) Phương trình (1) có nghiệm $\Leftrightarrow$ Phương trình (2) có nghiệm t, thoả $|t|\geq 4$.

Ta giải bằng phương pháp gián tiếp.

Tức là tìm m để phương trình (2) không có nghiệm thoả $|t|\geq 4$. (3)

Để ý : $f(0)=-m^2-m-1=-\left(m+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{3}{4}<0,\forall m$ Vì thế (3) $\Leftrightarrow\begin{cases}1.f(4)>0\\1.f(-4)>0\end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 19 - m - m^2 > 0 \\ 11 - m - m^2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 11 - m - m^2 > 0 \Leftrightarrow \frac{-1 - 3\sqrt{5}}{2} < m < \frac{-1 + 3\sqrt{5}}{2}$$

♦ Từ đó suy ra tập hợp các giá trị phải tìm của m là $\left[\begin{array}{l} m < \dfrac{-1 - 3\sqrt{5}}{2} \\ m > \dfrac{-1 + 3\sqrt{5}}{2} \end{array}\right.$.

IV. Phương trình $(ax+b)^2(a'x+b')^2+[(a+a')x+(b+b')]^2+c=0$

CÁCH GIẢI : Đặt ẩn phụ $t = (ax + b)(a'x + b')$

Thí dụ 14.

Giải phương trình $x^2(x-1)^2 = (2x-1)^2 + 2$ (1)

Lời giải

(1) $\Leftrightarrow x^2(x-1)^2 = [x + (x-1)]^2 + 2 \Leftrightarrow x^2(x-1)^2 = [x-(x-1)]^2 + 4x(x-1) + 2$

$\Leftrightarrow x^2(x-1)^2 - 4x(x-1) - 3 = 0$ (2)

Đặt $t = x(x-1)$, $t \geq -\dfrac{1}{4}$. Kết hợp với phương trình (1) $\Rightarrow t \geq \sqrt{2}$.

Phương trình (2) trở thành $t^2 - 4t - 3 = 0 \Leftrightarrow t = 2 + \sqrt{7} \Rightarrow x^2 - x - 2 - \sqrt{7} = 0$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{1 \pm \sqrt{9 + 4\sqrt{7}}}{2}$.

Thí dụ 15.

Giải phương trình $\left(\dfrac{1}{x^2 + x + 1}\right)^2 + \left(\dfrac{1}{x^2 + x + 2}\right)^2 = \dfrac{13}{36}$ (1)

Lời giải

Tập xác định R. Đặt $a = x^2 + x + 1 = (x + \dfrac{1}{2})^2 + \dfrac{3}{4} \geq \dfrac{3}{4}$. Phương trình (1) trở thành

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{(a+1)^2} = \frac{13}{36} \Leftrightarrow 36[(a+1)^2 + a^2] = 13a^2(a+1)^2$$

$\Leftrightarrow 36[(a+1)-a]^2 = 13a^2(a+1)^2 - 72a(a+1) \Leftrightarrow 36 = 13a^2(a+1)^2 - 72a(a+1)$ (2)

Đặt $t = a(a+1)$ (3), Suy ra $t > \dfrac{3}{4}\left(\dfrac{3}{4} + 1\right) = \dfrac{21}{16}$ (4)

Phương trình (2) trở thành $13t^2 - 72t - 36 = 0 \Leftrightarrow \left\{t = 6;\ t = -\dfrac{6}{13} \text{ (loại)}\right\}$

Với t = 6, thay vào (3) có: $a(a+1) = 6 \Leftrightarrow a^2 + a - 6 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = -3 \quad \text{(loại)} \\ a = 2 \end{array}\right.$

Với a = 2, có $x^2 + x + 1 = 2 \Leftrightarrow x^2 + x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$

Vậy phương trình đã cho có 2 nghiệm $x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$

Thí dụ 16.
Giải phương trình $2(x-3)^2(x+2)^2 = (2x-1)^2 - 9$ (1)

Lời giải

Ta có (1) $\Leftrightarrow 2(x-3)^2(x+2)^2 = [(x-3) + (x+2)]^2 - 9$

$\Leftrightarrow 2(x-3)^2(x+2)^2 = [(x-3) - (x+2)]^2 + 4(x-3)(x+2) - 9$

$\Leftrightarrow (x-3)^2(x+2)^2 = 2(x-3)(x+2) + 8 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 - x - 6 = 4 \\ x^2 - x - 6 = -2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 - x - 10 = 0 \\ x^2 - x - 4 = 0 \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \left\{ x = \dfrac{1 \pm \sqrt{41}}{2};\ x = \dfrac{1 \pm \sqrt{17}}{2} \right\}$.

Đó là tập nghiệm của phương trình đã cho.

V. Phương trình $a(ax^2+bx+c)^2+b(ax^2+bx+c)+c=x$ (1)

CÁCH GIẢI

Đặt $ax^2+bx+c=y$, sẽ có hệ (I) $\left\{\begin{array}{l} ay^2 + by + c = x \\ ax^2 + bx + c = y \end{array}\right.$

trừ vế theo vế ta có phương trình hệ quả $(x-y)[a(x+y)+b+1]=0$

Do vậy (I) $\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} ax^2 + bx + c = y \\ (x-y)[a(x+y)+b+1] = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} x = y \\ ax^2 + bx + c = y \end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{l} a(x+y)+b+1 = 0 \\ ax^2 + bx + c = y \end{array}\right. \end{array}\right.$

Việc giải phương trình (1) đưa về giải hai phương trình bậc hai.

Thí dụ 17.
Giải phương trình $2(2x^2 - 2x - 5)^2 - 4x^2 + 3x + 5 = 0$ (1)

Lời giải

• Đặt $y = 2x^2 - 2x - 5$. Để ý $\min\limits_{R}(2x^2 - 2x - 5) = -\dfrac{11}{2} \Rightarrow y \geq -\dfrac{11}{2}$ (2)

Suy ra $-4x^2 + 3x + 5 = -2y - x - 5$, phương trình đã cho trở thành

$$2y^2 - 2y - 5 = x \qquad (3)$$

Ta có hệ $\begin{cases} 2x^2 - 2x - 5 = y \\ 2y^2 - 2y - 5 = x \end{cases} \Rightarrow (x - y)(2x + 2 - 1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = y \\ x = \dfrac{1}{2} - y \end{array}\right.$ (4)

• Thay vào (3)

+ Với x=y, có $2y^2 - 3y - 5 = 0 \Leftrightarrow \{y = -1;\ y = \dfrac{5}{2}\}$ *(thích hợp (2))*

$\Rightarrow$ Phương trình có 2 nghiệm $\{x = -1;\ x = \dfrac{5}{2}\}$ (5)

+ Với $x = \dfrac{1}{2} - y$, có $4y^2 - y - 11 = 0 \Leftrightarrow y = \dfrac{1 \mp \sqrt{177}}{8}$ *(thích hợp (3))* (6)

Thay (6) vào (4) có $x = \dfrac{3 \pm \sqrt{177}}{8} \Rightarrow$ Phương trình có 2 nghiệm $x = \dfrac{3 \pm \sqrt{177}}{8}$ (7)

♦ Từ (5), (7) kết luận phương trình đã cho có 4 nghiệm là :

$$\{x = -1;\ x = \frac{5}{2};\ x = \frac{3 \pm \sqrt{177}}{8}\}$$

Thí dụ 18.

Giải phương trình $\sqrt{16 - 8x - 3x^2} = x^2 + 3x - 4$ (1)

Lời giải

Ta có (1) $\Leftrightarrow \begin{cases} 16 - 8x - 3x^2 = (x^2 + 3x - 4)^2 & (2) \\ x^2 + 3x - 4 \geq 0 & (3) \end{cases}$

Viết lại (2) $\Leftrightarrow (x^2 + 3x - 4)^2 + 3x^2 + 8x - 16 = 0$

$\Leftrightarrow (x^2 + 3x - 4)^2 + 3(x^2 + 3x - 4) - 4 = x$ (2')

Đặt $x^2 + 3x - 4 = y$. **Điều kiện** : $y \geq 0$ (4)

Phương trình đã cho trở thành $y^2 + 3y - 4 = x$. Ta có hệ : (*) $\begin{cases} y^2 + 3y - 4 = x \\ x^2 + 3x - 4 = y \end{cases}$

Trừ vế theo vế các phương trình có $(x - y)(x + y + 4) = 0$.

Bởi vậy ta có (*) $\Leftrightarrow \begin{cases} y^2 + 3y - 4 = x \\ (x - y)(x + y + 4) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} (A)\begin{cases} y^2 + 3y - 4 = x & (5) \\ x = y & (6) \end{cases} \\ (B)\begin{cases} y^2 + 3y - 4 = x & (7) \\ x = -y - 4 & (8) \end{cases} \end{array}\right.$

Xem hệ (A): Thế (6) vào (5) có $y^2 + 2y - 4 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = -1 - \sqrt{5} \text{ (loại)} \\ y = -1 + \sqrt{5} \end{array}\right.$

Cùng với (6) suy ra phương trình (1) có nghiệm $x = \sqrt{5} - 1$

Xem hệ (B): Thế (8) vào (7) có $y^2 + 4y = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = -4 \text{ (loại)} \\ y = 0 \end{array}\right.$

Thế $y = 0$ vào (8) có $x = -4$. Đó là một nghiệm của phương trình (1)

Vậy phương trình có tập hợp nghiệm là $\{x = -4; x = \sqrt{5} - 1\}$

Chú ý. Phương trình $a(ax^2 + bx + c)^2 + b(ax^2 + bx + c) + c = x$ là *một trường hợp đặc biệt* của phương trình $f[f(x)] = x$. Chúng ta còn gặp lại phương trình này trong §5, chương III. Phương trình, bất phương trình vô tỷ.

VI. Phương trình $x^4 = ax^2 + bx + c$ (1)

CÁCH GIẢI

(Tách bậc–đưa về phương trình tích)

Với mọi $m \in R$ ta luôn có (1) $\Leftrightarrow (x^2 + m)^2 = (2m + a)x^2 + bx + c - m^2$ (2)

Gọi $f(x) = (2m + a)x^2 + bx + c - m^2$. Ta tìm m sao cho f(x) trở thành bình phương đủ $\Leftrightarrow \{\Delta = 0; 2m + a > 0\}$ Khi đó $f(x) = [g(x)]^2$ và (1) $\Leftrightarrow x^2 + m = \pm g(x)$

Đây là các phương trình bậc 2.

Thí dụ 19.

Giải phương trình : $x^4 = 3x^2 + 10x + 4$ (1)

Lời giải

Với mọi m ta có (1) $\Leftrightarrow (x^2 + m)^2 = (3 + 2m)x^2 + 10x + 4 + m^2$ (2)

Gọi $f(x) = (3 + 2m)x^2 + 10x + 4 + m^2$

$\Delta'_f = 25 - (3 + 2m)(4 + m^2) = 2m^3 + 3m^2 + 8m - 13 = (m - 1)(2m^2 + 5m + 13)$

Ta tìm giá trị của m thoả $\{\Delta'_f = 0; m > -\frac{3}{2}\}$

• $\Delta'_f = 0 \Leftrightarrow (m - 1)(2m^2 + 5m + 13) = 0 \Leftrightarrow m = 1$. Thoả mãn điều kiện $m > -\frac{3}{2}$

Thay vào (2) có : (2) $\Leftrightarrow (x^2 + 1)^2 = 5x^2 + 10x + 5 \Leftrightarrow (x^2 + 1)^2 = 5(x + 1)^2$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x^2 + 1 = \sqrt{5}(x + 1) & (3.1) \\ x^2 + 1 = -\sqrt{5}(x + 1) & (3.2) \end{array}\right.$$

+ Phương trình (3-1) $\Leftrightarrow x = \dfrac{\sqrt{5} \pm \sqrt{1 + 4\sqrt{5}}}{2}$.

+ Phương trình (3-2) vô nghiệm, do $\Delta < 0$

Vậy phương trình (1) có hai nghiệm là $x = \dfrac{\sqrt{5} \pm \sqrt{1 + 4\sqrt{5}}}{2}$

Chú ý 1.

Việc tìm ra m=1 có thể làm trên nháp, không cần trình bày trên bài làm. Nghĩa là bạn được phép trình bày ngắn gọn như trong thí dụ 22 sau đây.

Thí dụ 20.

Giải phương trình $x^4 = 2x^2 + 3x - \frac{7}{16}$ (1)

Lời giải

Ta có (1) $\Leftrightarrow (x^2+1)^2 = 4x^2+3x+\frac{9}{16} \Leftrightarrow (x^2+1)^2 = \left(2x+\frac{3}{4}\right)^2$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2+1 = 2x+\frac{3}{4} \\ x^2+1 = -2x-\frac{3}{4} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-2x+\frac{1}{4}=0 \\ x^2+2x+\frac{7}{4}=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \pm \frac{\sqrt{3}}{2} \\ VN(\Delta' < 0) \end{array}\right.$$

Vậy phương trình có hai nghiệm là $x = 1 \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$

Chú ý 2.

2) Đằng sau sự trình bày như trên, người giải đã tìm được số m=1 trên bản nháp như dưới đây :

Với mọi m ta có (1) $\Leftrightarrow (x^2+m)^2 = 2(m+1)x^2+3x+m^2-\frac{7}{16}$

Gọi $f(x) = 2(m+1)x^2+3x+m^2-\frac{7}{16}$; $\Delta'_f = 9 - 8(m+1)\left(m^2-\frac{7}{16}\right)$

Ta tìm giá trị của m thoả $\{\Delta'_f = 0;\ m > -1\}$. Thấy rằng với m = 1, $\Delta'_f = 0$, thoả mãn $m > -1$. Nên m=1 là giá trị tương thích mà ta muốn tìm.

2) $\Delta_f = 0$ luôn là phương trình bậc 3 đối với m. Lời giải chỉ cần chỉ ra một nghiệm của nó là thành công.

Thí dụ 21.

Giải phương trình $x^4 - 3x^2 - 4x + \frac{24}{7} = 0$ (1)

Lời giải

Viết lại (1) $\Leftrightarrow (x^2+2)^2 = 7x^2+4x+\frac{4}{7} \Leftrightarrow (x^2+2)^2 = \left(x\sqrt{7}+\frac{2}{\sqrt{7}}\right)^2$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2+2 = x\sqrt{7}+\frac{2}{\sqrt{7}} \\ x^2+2 = -x\sqrt{7}-\frac{2}{\sqrt{7}} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 - x\sqrt{7} + 2 - \frac{2}{\sqrt{7}} = 0 \\ x^2 + x\sqrt{7} + 2 + \frac{2}{\sqrt{7}} = 0 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sqrt{7}x^2 - 7x + 2\sqrt{7} - 2 = 0\\ \sqrt{7}x^2 + 7x + 2\sqrt{7} + 2 = 0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = \dfrac{7\sqrt{7} \pm \sqrt{56 - 7\sqrt{7}}}{14}\\ VN(\Delta < 0)\end{array}\right.$$

Vậy phương trình có 2 nghiệm $x = \dfrac{7\sqrt{7} \pm \sqrt{56 - 7\sqrt{7}}}{14}$.

§4. NHỮNG PHƯƠNG TRÌNH KHÁC

Thí dụ 1.

Giải phương trình $\sqrt[5]{27}x^{10} - 5x^6 + \sqrt[5]{564} = 0$ (1)

Lời giải

Thấy rằng x = 0 không phải là nghiệm của phương trình. Chia các vế cho $\sqrt[5]{27}x^6$ ta có (1) $\Leftrightarrow x^4 - \dfrac{5}{\sqrt[5]{27}} + \sqrt[5]{\dfrac{864}{27}}\dfrac{1}{x^6} = 0 \Leftrightarrow x^4 + \dfrac{2}{x^6} = \dfrac{5}{\sqrt[5]{27}}$ (2)

Áp dụng Cô–si cho 5 số $\dfrac{x^4}{3}, \dfrac{x^4}{3}, \dfrac{x^4}{3}, \dfrac{1}{x^6}, \dfrac{1}{x^6}$ ta có :

$$\frac{x^4}{3} + \frac{x^4}{3} + \frac{x^4}{3} + \frac{1}{x^6} + \frac{1}{x^6} \geq 5\frac{1}{\sqrt[5]{27}} = \frac{5}{\sqrt[5]{27}}$$

Dấu đẳng thức có khi $\dfrac{x^4}{3} = \dfrac{1}{x^6} \Leftrightarrow x^{10} = 3 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt[10]{3}$

Do vậy (2) $\Leftrightarrow x = \pm\sqrt[10]{3}$. Đó là tập nghiệm của phương trình đã cho.

Thí dụ 2.

Giải phương trình $(x + 1)^6 + (x + \sqrt{5})^6 = 18 - 8\sqrt{5}$ (1)

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức $\dfrac{a^n + b^n}{2} \geq \left(\dfrac{a + b}{2}\right)^n$ với a + b > 0 ta có

$$\frac{(-x - 1)^6 + (x + \sqrt{5})^6}{2} \geq \left(\frac{-x - 1 + x + \sqrt{5}}{2}\right)^6 = \left(\frac{\sqrt{5} - 1}{2}\right)^6$$

Để ý : $\left(\dfrac{\sqrt{5} - 1}{2}\right)^6 = \left[\left(\dfrac{\sqrt{5} - 1}{2}\right)^3\right]^2 = (2 - \sqrt{5})^2 = 9 - 4\sqrt{5}$

Suy ra : $\dfrac{(-x - 1)^6 + (x + \sqrt{5})^6}{2} \geq 9 - 4\sqrt{5} \Leftrightarrow (x+1)^6 + (x + \sqrt{5})^6 = 18 - 8\sqrt{5}$

Dấu đẳng thức có khi $x - 1 = x + \sqrt{5} \Leftrightarrow x = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$

Bởi thế (1) $\Leftrightarrow x = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$. Đó là nghiệm duy nhất phương trình đã cho

Chú ý.

Nếu bạn quên cách chứng minh đẳng thức

$$\frac{a^n + b^n}{2} \geq \left(\frac{a+b}{2}\right)^n \quad (\forall n \in N^*, \forall a, b \in R \mid a + b \geq 0)$$

+ Dễ dàng thấy (1) đúng với $n = 0, n = 1, n = 2$

+ Giả sử (1) đúng với $n = k$, tức là $\dfrac{a^k + b^k}{2} \geq \left(\dfrac{a+b}{2}\right)^{k+1}$ (2)

Ta chứng minh (1) đúng với $n = k + 1$.

Ta có $\left(\dfrac{a+b}{2}\right)^{k+1} = \dfrac{a+b}{2} \cdot \left(\dfrac{a+b}{2}\right)^k \leq \dfrac{a+b}{2} \cdot \dfrac{a^k + b^k}{2}$ (3)

Để ý $\dfrac{a^k + b^k}{2} \cdot \dfrac{a+b}{2} = \dfrac{a^{k+1} + b^{k+1}}{2} - \dfrac{a^{k+1} + b^{k+1} - a^k b - ab^k}{4}$

+ Giả sử $a \geq b \Leftrightarrow a - b \geq 0$, (5)

Kết hợp $a + b \geq 0 \Leftrightarrow a \geq -b$. Suy ra $a \geq |b| \Rightarrow a^n \geq b^n \Leftrightarrow a^n - b^n \geq 0$ (6)

Từ (5), (6) $\Rightarrow (a-b)(a^n - b^n) \geq 0$ (7)

Từ (3), (4), (7) suy ra $\left(\dfrac{a+b}{2}\right)^{k+1} \leq \dfrac{a^{k+1} + b^{k+1}}{2}$. Vậy (1) đúng với $n = k + 1$. (8)

Theo kết luận của phép quy nạp, ta có (1) đúng $\forall n \in N^*, \forall a, b \in R \mid a + b \geq 0$.

(đpcm)

Đặc biệt Khi $a + b = 1$, công thức (1) cho $\dfrac{a^n + b^n}{2} \geq \dfrac{1}{2^n}$.

Thí dụ 3.

Giải phương trình : $2x^2 - 2x^4 - 5 \geq (x^4 + 2x^2 + 1)(x^2 - 2\sqrt{2}x + 1)$ (1)

Lời giải

Ta có (1) $\Leftrightarrow 2x^2 - 2x^4 - 5 + (x^4 + 2x^2 + 1) \geq (x^4 + 2x^2 + 1)(x^2 - 2\sqrt{2}x + 2)$

$\Leftrightarrow -(x^2-2)^2 \geq (x^4+2x^2+1)(x-\sqrt{2})^2 \Leftrightarrow (x^4+2x^2+1)(x-\sqrt{2})^2 + (x^2-2)^2 \leq 0$ (2)

Để ý : $x^4 + 2x^2 + 1 = (x^2 + 1)^2 > 0$; $(x - \sqrt{2})^2 \geq 0$; $(x^2 - 2)^2 \geq 0$

Nên (2) $\Leftrightarrow \begin{cases} x - \sqrt{2} = 0 \\ x^2 - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \sqrt{2}$.

Chú ý .

Tập nghiệm không thay đổi, cách giải không thay đổi nếu (1) là phương trình.

$$2x^2 - 2x^4 - 5 \geq (x^4 + 2x^2 + 1)(x^2 - 2\sqrt{2}x + 1)$$

Chương V

PHƯƠNG TRÌNH, BẤT PHƯƠNG TRÌNH VÔ TỶ

- *Phương trình đối xứng đối với P(x) và Q(x).*
- *Phương trình đẳng cấp bậc nhất đối với* $\sqrt{P(x)}$ *và* $\sqrt{Q(x)}$
- *Phương trình* $(ax+b)^n=p\sqrt[n]{a'x+b'}+qx+r \quad (n=2,3)$
- *Phương trình* $ax^2+bx+c=\sqrt{px^2+qx+r} \quad ap\neq 0$
- *Phép thế trong đối với phương trình* $\sqrt[3]{A(x)}\pm\sqrt[3]{B(x)}=\sqrt[3]{C(x)}$
- *Giải phương trình, bất phương trình vô tỷ bằng toạ độ vectơ*
- *Những phương trình khác*

§1. MỘT SỐ PHƯƠNG PHÁP GIẢI PHƯƠNG TRÌNH VÔ TỶ

Phương pháp 1. Nâng lên lên luỹ thừa

Cơ sở của phép nâng lên luỹ thừa là định lý sau đây :

ĐỊNH LÝ

- $\sqrt[2k]{P(x)}=Q(x) \Leftrightarrow \begin{cases} Q(x)\geq 0 \\ P(x)=[Q(x)]^{2k} \end{cases}$
- $\sqrt[2k+1]{P(x)}=Q(x) \Leftrightarrow P(x)=[Q(x)]^{2k+1}$

HỆ QUẢ. $\sqrt[2k]{P(x)}=\sqrt[2k]{Q(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} Q(x)\geq 0 \\ P(x)=Q(x) \end{cases}$

Trong trường hợp này, bạn chọn Q(x) sao cho việc giải $Q(x)\geq 0$ đơn giản hơn.

Phương pháp 2. Đặt ẩn phụ

Gợi ý đáng nhớ :

- Nếu biểu thức trong căn và biểu thức ngoài căn có hệ số các hạng tử cùng bậc (không kể hằng số) tỉ lệ với nhau thì đặt căn thức làm ẩn phụ.
- Nếu biểu thức chứa nhiều lớp căn thì có thể đặt căn thức trong cùng làm ẩn phụ
- Gặp phương trình có nhiều căn thức $f\left(x,\sqrt{A(x)},\sqrt{B(x)},\sqrt{C(x)}\right)=0$, bạn hãy chú ý các mối liên hệ giữa các biểu thức dưới dưới căn. Một số mối liên hệ thường gặp là : $A(x)\pm B(x)=kC(x)$, $A^2(x)-B^2(x)=kC(x)$, $A(x).B(x)=k^2C^2(x)$, $A(x).B(x)=k^2$. Bạn theo dõi các lời bình để sáng tỏ các nhận xét.

Phương pháp 3. Vectơ

Phương pháp 4. Đánh giá

Phương pháp 5. Sử dụng tính đồng biến, nghịch biến của hàm số

Thí dụ 1.

Giải phương trình $\sqrt{2x-3}=3-x$. (1)

Lời giải

Ta có (1) $\Leftrightarrow \begin{cases}3-x\ge 0\\ 2x-3=(3-x)^2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x\le 3\\ 2x-3=x^2-6x+9\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}x\le 3\\ x^2-8x+12=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x\le 3\\ x=2 \text{ hoặc } x=6\end{cases}$.

$\Leftrightarrow x=2$. Đó là nghiệm duy nhất của phương trình đã cho.

Thí dụ 2.

Giải phương trình $(2x^2+5x-3)\sqrt{14+5x-x^2}=0$ (1)

Lời giải

$$\text{Ta có (1)} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}14+5x-x^2=0\\ \begin{cases}14+5x-x^2>0\\ 2x^2+5x-3=0\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=-2 \text{ hoặc } x=7\\ \begin{cases}14+5x-x^2>0\\ x=-3 \text{ hoặc } x=\dfrac{1}{2}\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=-2\\ x=7\\ x=\dfrac{1}{2}\end{array}\right.$$

Lời bình

Phương trình đã cho có dạng $P(x)\sqrt{Q(x)}=0$

$$\text{Ta có}\quad P(x)\sqrt{Q(x)}=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}Q(x)=0\\ P(x) \text{ có nghĩa}\end{cases}\\ \begin{cases}Q(x)>0\\ P(x)=0\end{cases}\end{array}\right.$$

Trong phương trình $P(x)=2x^2+2x-3$ có nghĩa với mọi x. Nghiệm $x=-3$ của $P(x)$ bị loại do không thoả mãn $Q(x)\ge 0$.

Thí dụ 3.

Giải phương trình $\sqrt{x+1}-\sqrt{x-2}=\sqrt{2x-1}$ (1)

Lời giải

Điều kiện $x\ge 2$ (2)

Viết lại (1) $\Leftrightarrow \sqrt{x+1}=\sqrt{x-2}+\sqrt{2x-1}$

$\Leftrightarrow x+1=(x-2)+(2x-1)+2\sqrt{(x-2)(2x-1)} \Leftrightarrow 2-x=\sqrt{(x-2)(2x-1)}$ (3)

Từ (3) $\Rightarrow x\le 2$, kết hợp với (2) suy ra $x=2$.

Thay $x=2$ vào (1) thấy đúng. Vậy $x=2$ là nghiệm duy nhất của phương trình đã cho.

Lời bình

Nếu không nhận xét, bạn tiếp tục giải phương trình (3) như sau :

$$(3) \Leftrightarrow \begin{cases} 2-x \geq 0 \\ (2-x)^2 = (x-2)(2x-1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 2 \\ (x-2)(2x-1+x-2) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 2 \\ 3(x-2)(x-1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \text{ (loại)} \\ x = 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow x=2.$$

> **Thí dụ 4.**
>
> Giải phương trình $2x^2 - 5\sqrt{x^2-3x+5} = 6x - 7$ (1)

Lời giải

Viết lại (1) $\Leftrightarrow 2x^2 - 6x + 7 - 5\sqrt{x^2-3x+5} = 0$, đặt $\sqrt{x^2-3x+5} = t \geq 0$, phương trình trở thành $2t^2 - 5t - 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = -\dfrac{1}{2} \text{ (loại)} \\ t = 3 \end{array}\right.$

Với t = 3 có $\sqrt{x^2-3x+5} = 3 \Leftrightarrow x^2 - 3x + 5 = 9 \Leftrightarrow x^2 - 3x - 4 = 0$

$\Leftrightarrow \{x = -1; x = 4\}$.

Lời bình

• Trong phương trình (1), biểu thức trong căn và biểu thức ngoài căn có hệ số các hạng tử cùng bậc (không kể hằng số) tỉ lệ với nhau $\dfrac{1}{2} = \dfrac{-3}{-6}$ nên ta đặt căn thức làm ẩn phụ.

• Ta chỉ cần đặt điều kiện cho $t \geq 0$, không cần đặt điều kiện đối với x.

• Khi đặt $t = \sqrt{f(x)}$, điều kiện *chặt* của t là $t \geq \max\{0; \min f(x)\}$. Các bạn thấy điều này ở thí dụ ngay dưới đây.

> **Thí dụ 5.**
>
> Giải phương trình : $2x^2 + 2x + 1 = (4x-1)\sqrt{1+x^2}$ (1)

Lời giải

Tập xác định : R.

Đặt $\sqrt{1+x^2} = t \geq 1 \Rightarrow x^2 = t^2 - 1$, phương trình (1) trở thành

$2(t^2-1) + 2x + 1 = (4x-1)t \Leftrightarrow 2t^2 - (4x-1)t + 2x - 1 = 0.$ (2)

Xem (2) là phương trình đối với t, ta có $\Delta = (4x-1)^2 - 8(2x-1) = (4x-3)^2$ nên

$$(2) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t_1 = \dfrac{4x-1-4x+3}{4} = \dfrac{1}{2} < 1 \text{ (loại)} \\ t_2 = \dfrac{4x-1+4x-3}{4} = 2x-1 \end{array}\right.$$

Với t = 2x − 1 có $\sqrt{1+x^2} = 2x-1 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-1>1 \\ 1+x^2=(2x-1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-1>1 \\ 1+x^2=(2x-1)^2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x>1 \\ 3x^2-4x=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\geq 1 \\ x=0 \text{ hoặc } x=\dfrac{4}{3} \end{cases} \Leftrightarrow x=\dfrac{4}{3}$

Vậy $x=\dfrac{4}{3}$ là nghiệm duy nhất của phương trình đã cho.

Chú ý. Chúng ta còn trở lại Thí dụ này trong phương pháp đánh giá.

> **Thí dụ 5**(*).
>
> Giải phương trình : $3x^2-5x+6=2x\sqrt{x^2+x-3}$ (1)

Lời giải

Viết lại (1) $\Leftrightarrow (x^2+x-3)+(2x^2-6x+9)=2x\sqrt{x^2+x-3}$

Đặt $\sqrt{x^2+x-3}=t\geq 0$, phương trình trở thành $t^2-2xt+(2x^2-6x+9)=0$. (2)

Xem (2) là phương trình bậc hai đối với t, $\Delta'_t = x^2-(2x^2-6x+9)=-(x-3)^2\leq 0$.

Phương trình (2) có nghiệm (đối với t) $\Leftrightarrow$ x=3. Thay x=3 vào (1) ta có:

$$3^3-5.3+6=2.3\sqrt{3^2+3-3} \Leftrightarrow 18=18 \text{ (đúng)}$$

Vậy x=3 là nghiệm duy nhất của phương trình đã cho.

> **Thí dụ 6.**
>
> Giải phương trình : $\sqrt{x-\sqrt{x^2-1}}+\sqrt{x+\sqrt{x^2-1}}=2$ (1)

Lời giải

Điều kiện $\begin{cases} x-\sqrt{x^2-1}\geq 0 \\ x^2-1\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x\geq 1.$ (2)

Cách 1 : Ta có (1) $\Leftrightarrow \left(\sqrt{x-\sqrt{x^2-1}}+\sqrt{x+\sqrt{x^2-1}}\right)^2=4$

$\Leftrightarrow 2x+2\sqrt{(x-\sqrt{x^2-1})(x+\sqrt{x^2-1})}=4 \Leftrightarrow 2x+2=4 \Leftrightarrow x=1$. (thích hợp)

Vậy phương trình có một nghiệm duy nhất x = 1.

Cách 2 : Để ý $\sqrt{(x-\sqrt{x^2-1})(x+\sqrt{x^2-1})}=1$, nên đặt $\sqrt{x-\sqrt{x^2-1}}=t>0$

$\Rightarrow \sqrt{x+\sqrt{x^2-1}}=\dfrac{1}{t}$, phương trình đã cho trở thành $t+\dfrac{1}{t}=2 \Leftrightarrow t^2-2t=1$

$\Leftrightarrow (t-1)^2=1 \Leftrightarrow t=1$ (thích hợp).

Với t =1 có $\begin{cases} \sqrt{x-\sqrt{x^2-1}}=1 \\ \sqrt{x+\sqrt{x^2-1}}=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-\sqrt{x^2-1}=1 \\ x+\sqrt{x^2-1}=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x=2 \\ x+\sqrt{x^2-1}=1 \end{cases}$

$\Leftrightarrow x=1$.

Vậy x=1 là nghiệm duy nhất của phương trình đã cho.

Lời bình

Nếu tích hai căn thức bằng hằng số thì đặt một căn thức làm ẩn phụ.

Thí dụ 7.

Giải phương trình $\sqrt{x+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{x-\frac{1}{x^2}}=\frac{2}{x}$ (1)

Lời giải

Điều kiện : $x \geq 1$

Ta có (1) $\Leftrightarrow \sqrt{x^3+1}+\sqrt{x^3-1}=2 \Leftrightarrow 2x^3+2\sqrt{x^6-1}=4$

$\Leftrightarrow \sqrt{x^6-1}=2-x^3 \Leftrightarrow \begin{cases} x<\sqrt[3]{2} \\ x^6-1=x^6-4x^3+4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x<\sqrt[3]{2} \\ 4x^3=5 \end{cases} \Leftrightarrow x=\sqrt[3]{\frac{5}{4}}$

(thích hợp). Vậy $x=\sqrt[3]{\frac{5}{4}}$ là nghiệm duy nhất của phương trình đã cho.

Thí dụ 8 (Đ138).

Giải phương trình $\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}+\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}=\frac{x+3}{2}$ (1)

Lời giải

Điều kiện $x \geq 1$ (2)

Viết lại (1) $\Leftrightarrow \sqrt{(x-1)+2\sqrt{x-1}+1}+\sqrt{(x-1)-2\sqrt{x-1}+1}=\frac{x+3}{2}$

$\Leftrightarrow \sqrt{(\sqrt{x-1}+1)^2}+\sqrt{(\sqrt{x-1}-1)^2}=\frac{x+3}{2}$

$\Leftrightarrow \sqrt{x-1}+1+\left|\sqrt{x-1}-1\right|=\frac{x+3}{2}$ (3)

Trường hợp 1 : $\sqrt{x-1}<1 \Leftrightarrow 1 \leq x < 2$, ta có (3) $\Leftrightarrow 2=\frac{x+3}{2} \Leftrightarrow x=1$. (4)

Trường hợp 2 : $x \geq 2$, ta có (2) $\Leftrightarrow 2\sqrt{x-1}=\frac{x+3}{2} \Leftrightarrow 16(x-1)=(x+3)^2$

$\Leftrightarrow x^2-10x+25=0 \Leftrightarrow (x-5)^2=0 \Leftrightarrow x=5$ (thích hợp) (5)

Từ (4), (5) kết luận : Phương trình đã cho có hai gnhiệm là $x=1$; $x=5$.

Thí dụ 9 (HVBCVT, 2000).

Giải phương trình $\sqrt{4x+1}-\sqrt{3x-2}=\frac{x+3}{5}$ (1)

Lời giải

Điều kiện : $\begin{cases} 4x+1 \geq 0 \\ 3x-2 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow x \geq \frac{2}{3}$ (2

Nhân hai vế với $5(\sqrt{4x+1}+\sqrt{3x-2})>0$ ta có

$(1) \Leftrightarrow 5(4x+1-3x+2)=(x+3)(\sqrt{4x+1}+\sqrt{3x-2})$

$\Leftrightarrow 5(x+3)=(x+3)(\sqrt{4x+1}+\sqrt{3x-2})$ (3)

• Từ (2) $\Rightarrow x+3>0$ nên $(3) \Leftrightarrow f(x)=\sqrt{4x+1}+\sqrt{3x-2}=5$ (4)

Với $x=2$ có $f(2)=5$, $x>2$ có $f(x)>f(2)=5$, $x<2$ có $f(x)<f(2)=5$.

Vậy $x=2$ là nghiệm duy nhất của phương trình đã cho.

Lời bình

1) Gọi $A=4x+1$, $B=3x-2$, $C=x+3$ ta có $A-B=\frac{1}{5}C$. Đó là phương trình dạng $\sqrt{A}+\sqrt{B}=k(A-B)$.

2) Bạn cũng có thể chứng minh f(x) là hàm số đồng biến trên $\left[\frac{2}{3};+\infty\right)$. Từ đó suy ra $x=2$ là nghiệm duy nhất của phương trình đã cho.

§2. PHƯƠNG TRÌNH ĐỐI XỨNG ĐỐI VỚI P(X) VÀ Q(X)

$$\alpha\left[P(x)+Q(x)\right]+\beta\left(\sqrt{P(x)}\pm\sqrt{Q(x)}\right)\pm 2\alpha\sqrt{P(x).Q(x)}+\gamma=0 \quad (1)$$

$$(\alpha^2+\beta^2>0)$$

CÁCH GIẢI

Đặt $t=\sqrt{P(x)}\pm\sqrt{Q(x)}$ Suy ra $t^2=P(x)+Q(x)\pm 2\sqrt{P(x).Q(x)}$.

Phương trình (1) trở thành $\alpha t^2+\beta t+\gamma=0$

Thí dụ 1

Giải phương trình $\sqrt{x-2}-\sqrt{x+2}=2\sqrt{x^2-4}-2x+2$ (1)

Lời giải

Điều kiện $x\geq 2$ (2)

Đặt $t=\sqrt{x-2}-\sqrt{x+2}$, $t<0$. Suy ra $t^2=2x-2\sqrt{x^2-4}$. (3)

Phương trình (1) trở thành : $t=2-t^2 \Leftrightarrow t^2+t-2=0 \overset{t<0}{\Leftrightarrow} t=-2$

Thay $t=-2$ vào (3) có: $4=2x-2\sqrt{x^2-4} \Leftrightarrow \sqrt{x-2}\left(\underbrace{\sqrt{x-2}-\sqrt{x+2}}_{<0}\right)=0$

$\Leftrightarrow \sqrt{x-2}=0 \Leftrightarrow x=2$ [thích hợp (2)].

Vậy phương trình có một nghiệm duy nhất là $x=2$.

Thí dụ 2

Cho phương trình $\sqrt{x+1} + \sqrt{4-x} + \sqrt{(x+1)(4-x)} = m$ (1)

a) Giải phương trình khi m = 5.

b) Tìm m để phương trình có nghiệm duy nhất.

Lời giải

Điều kiện : $-1 \le x \le 4$ (2)

Cách 1. Đặt $t = \sqrt{x+1} + \sqrt{4-x}$, có $t^2 = 5 + 2\sqrt{(x+1)(4-x)}$, $t \ge \sqrt{5}$

Suy ra $\sqrt{(x+1)(4-x)} = \dfrac{t^2-5}{2}$ (3)

Phương trình (1) trở thành $t^2+2t-5-2m = 0$

a) Khi m = 5, phương trình (4) trở thành $t^2+2t-15 = 0 \overset{t\ge\sqrt{5}}{\Leftrightarrow} t = 3$

Thay t = 3 vào (3) ta có $\sqrt{(x+1)(4-x)} = \dfrac{3^2-5}{2} \Leftrightarrow \sqrt{(x+1)(4-x)} = 2$

$\Leftrightarrow 3x - x^2 = 0 \Leftrightarrow \{x = 0; x = 3\}$ [thích hợp điều kiện (2)].

Vậy phương trình đã cho có 2 nghiệm là $\{x=0; x=3\}$

Lời bình 3. *Trong phương trình* (I) *khi* P(x) ± Q(x) = k (const), *bạn cần biết thêm các cách giải sau:*

Cách 2. Đặt $\sqrt{1+x} = u \ge 0$; $\sqrt{4-x} = v \ge 0$ ta có hệ

$$\begin{cases} u^2+v^2=5 \\ u+v+uv=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u+v=3 \\ uv=2 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} u=1 \\ v=2 \end{cases} \\ \begin{cases} u=2 \\ v=1 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=3 \end{array}\right.$$

Đó là tập nghiệm của phương trình đã cho.

Cách 3 (Toạ độ) Đặt như cách 2 dẫn tới hệ (*) $\begin{cases} u^2+v^2=5 & (5) \\ u+v=3 & (6) \\ u \ge 0;\ v \ge 0 \end{cases}$

Trong mặt phẳng toạ độ Ouv, gọi $(\mathscr{C})$ là đường tròn, $(\mathscr{D})$ là đường thẳng theo thứ tự lần lượt có phương trình là (5), (6).

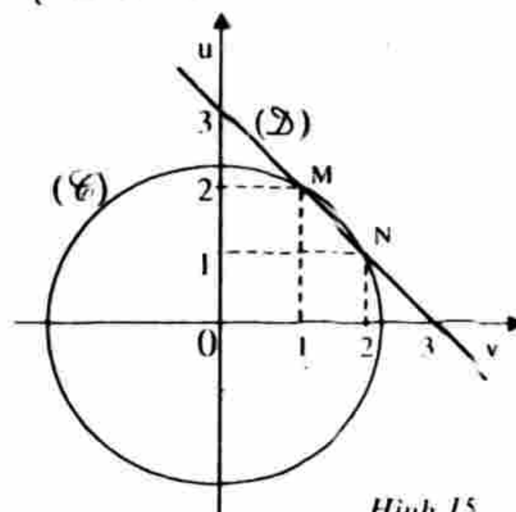
Thấy rằng M(1; 2); N(2; 1) là giao của chúng.

Suy ra hệ (*) có nghiệm {u = 1; u = 2}

Với u = 1 ta có $\sqrt{1+x} = 1 \Leftrightarrow x = 0$

Với u = 2 ta có $\sqrt{1+x} = 2 \Leftrightarrow x = 3$

Vậy phương trình đã cho có 2 nghiệm là {x = 0; x = 3}. (h. 15)



Hình 15

b) • *Điều kiện cần*. Thấy rằng x_0 là nghiệm của (1) thì $3 - x_0$ cũng là nghiệm của phương trình (1). Bởi thế điều kiệncần để phương trình có nghiệm duy nhất là $x_0 = 3 - x_0$

$\Leftrightarrow x_0 = \frac{3}{2}$. Thay vào (1) sẽ có $m = \frac{5}{2} + \sqrt{10}$ (7)

• *Điều kiện đủ*. Với $m = \frac{5}{2} + \sqrt{10}$, phương trình (1) trở thành

$$\sqrt{x+1} + \sqrt{4-x} + \sqrt{(x+1)(4-x)} = \frac{5}{2} + \sqrt{10} \quad (8)$$

Theo bất đẳng thức Bunhiacopski : $\sqrt{x+1} + \sqrt{4-x} \leq \sqrt{1+1}\sqrt{1+4} = \sqrt{10}$ (9)

Theo bất đẳng thức Cô–si : $\sqrt{(x+1)(4-x)} \leq \frac{x+1+4-x}{2} = \frac{5}{2}$ (10)

Cộng vế theo vế các kết quả (9), (10) ta có :

$$\sqrt{x+1} + \sqrt{4-x} + \sqrt{(x+1)(4-x)} \leq \frac{5}{2} + \sqrt{10}$$

Dấu đẳng thức có khi trong (9) và (10) đồng thời xảy ra $\Leftrightarrow 1 + x = 4 - x$

$\Leftrightarrow x = \frac{3}{2}$. Suy ra phương trình (8) nghiệm duy nhất là $x = \frac{3}{2}$ (11)

Từ (7), (11) kết luận phương trình (1) có nghiệm duy nhất khi và chỉ khi

$$m = \frac{5}{2} + \sqrt{10}$$

Lời bình 4

Phương pháp thường dùng giải bài toán "Tìm điều kiện của tham số m để phương trình f(m, x) = 0 có nghiệm duy nhất" là phương pháp cần và đủ.

Vấn đề cốt yếu của điều kiện cần là nêu ra được nhận xét đặc trưng của phương trình đang xét. Các nhận xét luôn được đề cập tới là tính chẵn lẻ, tính đối xứng của hàm f(m, x).

Lời bình 5

1. *Xem phương trình* $f(x) := \sqrt{x+a} + \sqrt{b-x} + p\sqrt{(x+a)(b-x)} = m$ (13)

Để ý : với mọi a, b luôn có $f(x) = f(b-a-x)$ *bởi thế phương trình* $f(x) = m$ *có nghiệm duy nhất khi và chỉ khi* $x = b-a-x \Leftrightarrow x = \frac{b-a}{2}$.

Thay vào (13) có $m = \sqrt{2(b-a)} + \frac{p}{2}(b+a)$.

2. *Nói rộng ra vấn đề nghiệm duy nhất của phương trình*

*f(m, P(x), Q(x))=0 (14) đối xứng đối với P(x) và Q(x) chỉ đặt ra khi phương trình P(x)=Q(x) (15) có nghiệm duy nhất. **Nghiệm duy nhất (nếu có) của phương trình (14) chỉ có thể là nghiệm duy nhất của phương trình (15) mà thôi.***

Thí dụ 3

Cho phương trình $\sqrt{1+x}+\sqrt{8-x}+\sqrt{(1+x)(8-x)}=m$ (1)

a) *Giải khi m= 3.*

b) *Tìm m để phương trình có nghiệm.*

Lời giải

Đặt $\sqrt{1+x}+\sqrt{8-x}=t>0 \Rightarrow t^2=9+2\sqrt{(1+x)(8-x)} \Rightarrow t\geq 3$ và

$\sqrt{(1+x)(8-x)}=\dfrac{t^2-9}{2}$ (2)

Lại có $t<\sqrt{(1+1)(1+x+8-x)}=3\sqrt{2}$ suy ra điều kiện cuat t là $3\leq t\leq 3\sqrt{2}$ (3)

Phương trình (3) trở thành $t+\dfrac{t^2-9}{2}=m \Leftrightarrow t^2+2t-9=2m$ (4)

a) Khi m = 3 ta có (3) $\Leftrightarrow t^2+2t-15=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=-5 \text{ (loại)} \\ t=3 \end{array}\right.$

Với t = 3, thay vào (2) có $\sqrt{(1+x)(8-x)}=0 \Leftrightarrow x=-1$ và $x=8$

Vậy khi m = 3, phương trình có hai nghiệm là x = –1 và x = 8.

b) Phương trình (1) có nghiệm $\Leftrightarrow$ Phương trình (3) có nghiệm thuộc khoảng $[3;\ 3\sqrt{2}\ ]$.

Xét hàm số $f(t)=t^2+2t-9$. trên $\mathcal{D}=[3;3\sqrt{2}\ ]$. Để ý $-\dfrac{b'}{a}=-1<3$

$\Rightarrow$ Trên $\mathcal{D}$, f(t) là hàm đồng biến $\Rightarrow \begin{cases} \underset{\mathcal{D}}{\text{Min}}\, f(t)=f(3)=6 \\ \underset{\mathcal{D}}{\text{Max}}\, f(t)=f(3\sqrt{2})=9+6\sqrt{2} \end{cases}$

Viết lại : Phương trình (4) $\Leftrightarrow$ 2m = f(t). Phương trình (4) có nghiệm khi và chỉ khi $\underset{\mathcal{D}}{\min} f(t)\leq 2m\leq \underset{\mathcal{D}}{\max} f(t) \Leftrightarrow 6\leq 2m\leq 9+6\sqrt{2} \Leftrightarrow 3\leq m\leq \dfrac{9+6\sqrt{2}}{2}$

Vậy : Tập hợp giá trị phải tìm của m là : $3\leq m\leq \dfrac{9+6\sqrt{2}}{2}$

Chú ý. Các cách khác để giải thí dụ 3 dành cho bạn đọc.

Lời bình 6

Hai cách 3 và 4 có hiệu lực mạnh mẽ trong bài toán tìm giá trị của tham số để phương trình có nghiệm. Đối với các bài không có tham số, bạn chỉ áp dụng khi dễ đoán toạ độ (đối với cách 3.

Thí dụ 4.

Giải phương trình $x^3+\sqrt{(1-x^2)^3}=x\sqrt{2(1-x^2)}$ (1)

Lời giải

Điều kiện : $-1<x<1$ (2)

Cách 1: Đặt $t = x+\sqrt{1-x^2}$ (3). Điều kiện $|t|\le\sqrt{2}$. Sẽ có :

- $t^2 = 1+2x\sqrt{1-x^2} \Rightarrow x\sqrt{1-x^2} = \dfrac{t^2-1}{2}$ (4)
- $t^3 = x^3+\sqrt{(1-x^2)^3}+3tx\sqrt{1-x^2}$

$\Rightarrow t^3 = x^3+\sqrt{(1-x^2)^3}+3t\dfrac{t^2-1}{2} \Leftrightarrow x^3+\sqrt{(1-x^2)^3} = \dfrac{3t-t^3}{2}$

Phương trình (1) trở thành $\dfrac{3t-t^3}{2} = \dfrac{\sqrt{2}(t^2-1)}{2} \Leftrightarrow t^3+\sqrt{2}t^2-3t-\sqrt{2}=0$

$\Leftrightarrow t^3+\sqrt{2}t^2-3t-\sqrt{2}=0 \Leftrightarrow (t-\sqrt{2})(t+\sqrt{2}+1)(t+\sqrt{2}-1)=0$ (5)

Do $|t|\le\sqrt{2} \Rightarrow t+\sqrt{2}+1>0$ nên (5) $\Leftrightarrow (t-\sqrt{2})(t+\sqrt{2}-1)=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=\sqrt{2} \\ t=1-\sqrt{2} \end{array}\right.$. Thay vào (4) :

- Với $t=\sqrt{2}$ có $x\sqrt{1-x^2}=\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x^4-4x^2+1=0 \\ 0<x<1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (2x^2-1)^2=0 \\ 0<x<1 \end{cases}$

$\Leftrightarrow x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ (thích hợp (2))

- Với $t=1-\sqrt{2}$ có $x\sqrt{1-x^2}=1-\sqrt{2} \Leftrightarrow \begin{cases} -1<x<0 \\ x^4-x^2+3-2\sqrt{2}=0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -1<x<0 \\ x^2=\dfrac{1+\sqrt{8\sqrt{2}-11}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x=-\dfrac{\sqrt{2(1+\sqrt{8\sqrt{2}-11})}}{2}$

Vậy phương trình đã cho có tập nghiệm là $\left\{x=\dfrac{\sqrt{2}}{2};\ x=-\dfrac{\sqrt{2(1+\sqrt{8\sqrt{2}-11})}}{2}\right\}$

Thí dụ 5

Giải phương trình $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{\sqrt{2-x^2}}=2$ (1)

Lời giải

Điều kiện : $0<|x|<2$

Ta có (1) $\Leftrightarrow x+\sqrt{2-x^2}=2x\sqrt{2-x^2}$ (2)

Đặt $t=x+\sqrt{2-x^2}$, điều kiện $|t|\le 2$ (3)

Suy ra $t^2=2+2x\sqrt{2-x^2} \Leftrightarrow 2x\sqrt{2-x^2}=t^2-2$ (4)

Phương trình (2) trở thành $t=t^2-2 \Leftrightarrow t^2-t-2=0 \Leftrightarrow \{t=2;\ t=-1\}$.

Thay vào (4) :

Với $t = 2$, có $x\sqrt{2 - x^2} = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2(2 - x^2) = 1 \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x^2 - 1)^2 = 0 \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1$

Với $t = -1$, có $2x\sqrt{2 - x^2} = -1 \Leftrightarrow \begin{cases} 4x^2(2 - x^2) = 1 \\ x < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8x^4 - 4x^2 + 1 = 0 \\ x < 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = \dfrac{1 + \sqrt{3}}{4} \\ x < 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = -\dfrac{\sqrt{1 + \sqrt{3}}}{2}$

Vậy phương trình có tập nghiệm là : $\left\{ x = 1 \; ; \; x = -\dfrac{\sqrt{1 + \sqrt{3}}}{2} \right\}$

Chú ý

Phương trình trên thuộc dạng $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} = b$, *$(ab \neq 0)$*

$\Leftrightarrow x + \sqrt{a^2 - x^2} = bx\sqrt{a^2 - x^2} \quad (0 < |x| \leq |a| \; ; \; ab \neq 0)$

Đây là phương trình có đặc điểm như trong lời bình 5. Bởi vậy, ngoài cách giải trên nó còn có 3 cách giải khác nữa như thí dụ 2.

Thí dụ 6

Giải phương trình $x + \dfrac{x}{\sqrt{x^2 - 1}} = \dfrac{35}{12}$ (1)

Lời giải

Điều kiện : $x > 1$ (2)

Với điều kiện đó, đặt $x = \dfrac{1}{y}$, điều kiện (2) $\Leftrightarrow 0 < y < 1$ (3)

Phương trình (1) trở thành

$\dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{\sqrt{1 - y^2}} = \dfrac{35}{12} \Leftrightarrow y + \sqrt{1 - y^2} = \dfrac{35}{12} y\sqrt{1 - y^2}$ (4)

Đặt $t = y + \sqrt{1 - y^2} \Rightarrow t^2 = 1 + 2y\sqrt{1 - y^2} \Leftrightarrow y\sqrt{1 - y^2} = \dfrac{t^2 - 1}{2}$ (5)

Điều kiện $1 < t \leq \sqrt{2}$ (6)

Phương trình (4) trở thành $t = \dfrac{35(t^2 - 1)}{24} \Leftrightarrow 35t^2 - 24t - 35 = 0$

$\Leftrightarrow \left\{ t = \dfrac{7}{5} \; ; \; t = -\dfrac{5}{7} \text{ (loại do (6))} \right\}$. Thay $t = \dfrac{7}{5}$ vào (5) có :

$y\sqrt{1 - y^2} = \dfrac{\frac{49}{25} - 1}{2} \Leftrightarrow y\sqrt{1 - y^2} = \dfrac{12}{25} \Leftrightarrow y^2(1 - y^2) = \dfrac{144}{625} \Leftrightarrow y^4 - y^2 + \dfrac{144}{625} = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y^2 = \dfrac{16}{25} \\ y^2 = \dfrac{9}{25} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = \pm\dfrac{4}{5} \\ y = \pm\dfrac{3}{5} \end{array}\right. \qquad (7)$$

Từ (3), (7) suy ra $\left[\begin{array}{l} y = \dfrac{4}{5} \\ y = \dfrac{3}{5} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{5}{4} \\ x = \dfrac{5}{3} \end{array}\right.$

Đó là tập nghiệm của phương trình đã cho.

Chú ý *Phương trình trên thuộc dạng* $x + \dfrac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}} = b$, *(ab ≠ 0)*

Dễ dàng chuyển phương trình này về dạng $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} = b$, *(ab ≠ 0) bởi phép thế* $x = \dfrac{1}{y}$.

Thí dụ 7 *(Phương trình đối xứng lệch).*

Giải phương trình $4\sqrt{1+x} - 1 = 3x + 2\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x^2}$ (1)

Lời giải

Điều kiện : $-1 \le x \le 1$ (2)

Đặt $\sqrt{1-x} = t \ge 0 \Rightarrow$ Sẽ có $3x = 2(1+x) - (1-x) - 1 = 2(1+x) - t^2 - 1$.

Phương trình (1) trở thành $4\sqrt{1+x} - 1 = 2(1+x) - t^2 - 1 + 2t + t\sqrt{1+x}$

$\Leftrightarrow t^2 - (2+\sqrt{1+x})t + 4\sqrt{1+x} - 2(1+x) = 0$. (3)

Xem (3) là phương trình bậc hai đối với t, có $\Delta = (2 - 3\sqrt{1+x})^2$.

Suy ra (3) $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 2\sqrt{1+x} \\ t = 2 - \sqrt{1+x} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{1-x} = 2\sqrt{1+x} \\ \sqrt{1-x} = 2 - \sqrt{1+x} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\dfrac{3}{5} \\ x = 0 \end{array}\right.$

(thích hợp (2))

- Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm $x = 0$ và $x = \dfrac{3}{5}$

Chú ý

Phương trình trên thuộc dạng

$$\alpha P(x) + \alpha' Q(x) + \beta.\sqrt{P(x)} + \beta'\sqrt{Q(x)} + \gamma.\sqrt{P(x).Q(x)} + \eta = 0$$

gọi là phương trình "đối xứng lệch".

Khi {α' = α ; β' = β} phương trình "đối xứng lệch" trở thành phương trình đối xứng $\alpha[P(x) + Q(x)] + \beta\left(\sqrt{P(x)} + \sqrt{Q(x)}\right) + 2\alpha\sqrt{P(x).Q(x)} + \gamma = 0$

• Phương trình đối xứng giải được theo hai cách đặt ẩn phụ toàn phần $t = \left(\sqrt{P(x)} \pm \sqrt{Q(x)}\right)$, hoặc không toàn phần : $t = \sqrt{Q(x)}$.

• Phương trình đối xứng lệch không giải được theo cách đặt $t = \left(\sqrt{P(x)} \pm \sqrt{Q(x)}\right)$

Lời giải trên đã trình bày bằng cách đặt $t = \sqrt{Q(x)}$, đưa về giải phương trình theo ẩn phụ t. Phép giải chỉ thành công khi biệt thức Δ_t có là hữu tỉ. Chú ý là trong bài ra, các hạng tử ở ngoài căn thức chưa có dạng $\alpha P(x) + \alpha' Q(x) + \eta$. Để giải chúng ta phải khôi phục lại nó, khi đó $Q(x) = t^2$

BÀI TẬP

Bài 1. Cho phương trình $\sqrt{x+1} + \sqrt{3-x} - \sqrt{(x+1)(3-x)} = m$

a) Giải khi m = 2.

b) Tìm m để phương trình có nghiệm . .

c) Tìm m để phương trình có nghiệm duy nhất.

Bài 2. Giải các phương trình :

a) $3 + 2\sqrt{x - x^2} = 3(\sqrt{x} - \sqrt{1-x})$

b) $\sqrt{2x+3} + \sqrt{x+1} = 3x + 2\sqrt{2x^2+5x+3} - 16$

Bài 3. Tìm m để các phương trình sau có nghiệm duy nhất :

a) $\sqrt{x} + \sqrt{1-x} + 2m\sqrt{x(1-x)} - 2\sqrt[4]{x(1-x)} = m^3$

b) $\sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{1-x} + \sqrt{x} + \sqrt{1-x} = m.$

§3. PHƯƠNG TRÌNH ĐẲNG CẤP ĐỐI VỚI $\sqrt{P(x)}$ VÀ $\sqrt{Q(x)}$

$$\alpha.P(X) + \beta.Q(X) + \gamma.\sqrt{P(x).Q(x)} = 0 \quad (\alpha\beta\gamma \neq 0) \quad (I^*)$$

Chẳng hạn :

a) $3(x-1) + 2(x^2+x+1) = 7\sqrt{(x-1)(x^2+x+1)}$ (1*)

b) $2(x^2-x+1) - (x^2+x+1) = \sqrt{(x^2-x+1)(x^2+x+1)}$ (2*)

c) $2(x+1) + 3(x^2-x+1) = 5\sqrt{(x+1)(x^2-x+1)}$ (3*)

CÁCH GIẢI

Chia hai vế của phương trình cho Q(x), đặt $t = \sqrt{\dfrac{P(x)}{Q(x)}}$, điều kiện : (*), dẫn phương trình (I*) tới phương trình $\alpha t^2 + \gamma t + \beta = 0$

Chú ý : Từ $t = \sqrt{\dfrac{P(x)}{Q(x)}}$ => f(t, x) = 0 (ẩn là x) => đk (*) của t.

Thí dụ 1

Giải phương trình $2x^2 + 5x - 1 = 7\sqrt{x^3 - 1}$ (1)

Lời giải

Điều kiện : $x \geq 1$ (2)

Ta có : (1) <=> $3(x - 1) + 2(x^2 + x + 1) = 7\sqrt{(x - 1)(x^2 + x + 1)}$ (1*)

Để ý x = 1 không phải là nghiệm, chia hai vế cho $x - 1 > 0$ ta có :

(1*) <=> $2\dfrac{x^2 + x + 1}{x - 1} + 3 = 7\sqrt{\dfrac{x^2 + x + 1}{x - 1}}$ (3)

Đặt $t = \sqrt{\dfrac{x^2 + x + 1}{x - 1}}$ => $x^2 + (1 - t^2)x + 1 + t^2 = 0$ (4)

$\Delta_x = t^4 - 6t^2 - 3$. Tập giá trị của t là nghiệm(*) của $\begin{cases} t \geq 0 \\ \Delta_x \geq 0 \end{cases}$ <=> $t \geq \sqrt{3 + 2\sqrt{3}}$ (5)

Phương trình (3) trở thành : $2t^2 - 7t + 3 = 0$ <=> $\{t = 3; t = \dfrac{1}{2}\}$.

Kết hợp với (5) có t = 3, thay vào (4) có $x^2 - 8x + 10 = 0$ <=> $x = 4 \pm \sqrt{6}$.

(thích hợp (2)).

Vậy (1) có tập nghiệm là : $x = 4 \pm \sqrt{6}$

Lời bình 1.

Gọi $Q(x) = x - 1$; $P(x) = x^2 + x + 1$. ***Mấu chốt*** *của lời giải là phân tích vế trái của phương trình(1) [VT(1)] thành $VT = 2P(x) + 3Q(x)$. Tinh ý bạn sẽ thấy 2 là hệ số của x^2 trong VT(1). Cũng từ đó suy ra 3.*

Tuy nhiên dễ dàng tìm lại các số 2 và 3 bằng phương pháp hệ số bất định :

$2x^2 + 5x - 1 = p(x^2 + x + 1) + q(x - 1) \Leftrightarrow 2x^2 + 5x - 1 = px^2 + (p + q)x + p - q$

$\Leftrightarrow \{p = 2; q = 3\}$

Chú ý.

*1) Hoàn toàn bình đẳng, bạn có thể chia cho **P(x)** hoặc* $\sqrt{P(x).Q(x)}$

2) Thay cho chia, bạn đặt $\sqrt{Q(x)} = t\sqrt{P(x)}$ *(hay* $\sqrt{P(x)} = t\sqrt{Q(x)}$ *)*

Thí dụ 2

Cho phương trình $x^2 - 3x + 1 = m\sqrt{x^4 + x^2 + 1}$ (1)

a) Giải phương trình khi $m = -\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

b) Tìm tập hợp các giá trị của m để phương trình (1) có lẻ số nghiệm thực.

Lời giải

Cách 1 : Để ý $x^4 + x^2 + 1 = (x^2 + 1)^2 - x^2 = (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1) > 0, \forall x \in R$

Viết lại (1) $\Leftrightarrow$ $2(x^2-x+1)-(x^2+x+1)= m\sqrt{(x^2-x+1)(x^2+x+1)}$ (1')

Đặt $\sqrt{x^2-x+1} = t.\sqrt{x^2+x+1}$ (2)

Phương trình (1) trở thành : $2(x^2+x+1)t^2-(x^2+x+1) = m(x^2+x+1)t$

$(x^2+x+1)(2t^2-mt-1) = 0 \Leftrightarrow 2t^2-mt-1=0$ (3)

Điều kiện1 : $t > 0$

Điều kiện 2 :

Ta có (2) $\Leftrightarrow x^2-x+1=(x^2+x+1)t^2 \Leftrightarrow (t^2-1)x^2+(t^2+1)x+t^2-1=0$ (4)

Thấy rằng : $t = 1$, phương trình (4) cho nghiệm $x = 0$.

Với $0 < t \neq 1$; (4) là phương trình bậc hai có $\Delta=(t^2+1)^2-4(t^2-1)^2=(3-t^2)(3t^2-1)$

Tập giá trị của t là $\Delta \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{3} \leq t^2 \leq 3 \\ t \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{3}} \leq |t| \leq \sqrt{3} \\ t \neq 1 \end{cases}$

Từ các điều kiện 1 và điều kiện 2 suy ra : $\frac{1}{\sqrt{3}} \leq t \leq \sqrt{3}$ (5)

a) Khi $m=-\frac{\sqrt{3}}{3}$, phương trình (3) trở thành $2t^2+\frac{\sqrt{3}}{3}t-1=0$

$\Leftrightarrow \left\{t=\frac{1}{\sqrt{3}};\ t=-\frac{\sqrt{3}}{2}\right\}$. Kết hợp với (5) có $t=\frac{1}{\sqrt{3}} (\Leftrightarrow \Delta = 0)$.

Thay vào phương trình (4) có nghiệm kép $x = \frac{t^2+1}{2(1-t^2)} \Leftrightarrow x = \frac{\frac{1}{3}+1}{2(1-\frac{1}{3})}$

$\Leftrightarrow x=1$

b) Thấy rằng, với mỗi t thoả điều kiện (5), phương trình (4) có không quá hai nghiệm thực. Bởi vậy phương trình (1) có lẻ số nghiệm thực $\Leftrightarrow$ (4) có duy nhất một nghiệm $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=1 \\ \Delta_x = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=1 \\ t=\frac{1}{\sqrt{3}} \\ t=\sqrt{3} \end{array}\right.$ Thay lần lượt các giá trị của t vào (3), theo thứ tự có các giá trị phải tìm của m là $m\in\{1; \frac{-1}{\sqrt{3}}; \frac{5}{\sqrt{3}}\}$.

Cách 2.

**Nhận xét 1*

Phương trình (1) có một nghiệm duy nhất $x = 0$ khi và chỉ khi $m = 1$. (6)

Với $x \neq 0$, chia cho x, đặt $t = x + \frac{1}{x}$ (7)

Điều kiện $|t| > 2$. Phương trình (1) trở thành $\left[\begin{array}{l}(8-1)\begin{cases}t-3=m\sqrt{t^2-1}\\ t\geq 2\end{cases}\\ (8-2)\begin{cases}t-3=m\sqrt{t^2-1}\\ t\leq -2\end{cases}\end{array}\right.$

* *Nhận xét 2.* Xem (7) là phương trình với ẩn x.

Với $|t| = 2$, (7) có một nghiệm thực duy nhất.

Với $|t| > 2$, (7) có hai nghiệm thực phân biệt

Bởi vậy: Phương trình (1) có lẻ số nghiệm thực $x \neq 0$ xảy ra khi và chỉ khi

$$\left[\begin{array}{l}(8-1)\begin{cases}t-3=m\sqrt{t^2-1}\\ t=2\end{cases}\\ (8-2)\begin{cases}t-3=m\sqrt{t^2-1}\\ t=-2\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}m=-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\\ m=\dfrac{5}{\sqrt{3}}\end{array}\right. \quad (9)$$

Từ (6), (9) suy ra tập hợp các giá trị phải tìm của m là :

$$\{m=1;\ m=-\frac{1}{\sqrt{3}};\ m=\frac{5}{\sqrt{3}}\}$$

Lời bình 2

Lời giải trên áp dụng cho phương trình dạng $\alpha x^2+\beta x+\alpha=\sqrt{px^4+qx^2+p}$.
Đó là một biến thể đặc biệt của phương trình hồi quy bậc 4 :

$$\alpha x^4+\beta x^3+\gamma x^2+\lambda\beta x+\lambda^2\alpha=0 \quad (\alpha\beta\gamma\lambda\neq 0)$$

Thí dụ 3. Giải phương trình $\sqrt{5x^2+14x+9}-\sqrt{x^2-x-20}=5\sqrt{x+1}$ (1)

Lời giải

Điều kiện: $\begin{cases}5x^2+14x+9\geq 0\\ x^2-x-20\geq 0\\ x+1\geq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(x+1)(5x+9)\geq 0\\ (x+4)(x-5)\geq 0\\ x\geq -1\end{cases} \Leftrightarrow x\geq 5$ (2)

Ta có (1) $\Leftrightarrow \sqrt{5x^2+14x+9}=\sqrt{x^2-x-20}+5\sqrt{x+1}$ (3)

Bình phương các vế của (2) có (3) $\Leftrightarrow 2x^2-5x+2=5\sqrt{(x^2-x-20)(x+1)}$

$\Leftrightarrow 2x^2-5x+2=5\sqrt{(x+4)(x-5)(x+1)}$ (4)

$\Leftrightarrow 3(x+4)+2(x^2-4x-5)=5\sqrt{(x+4)(x^2-4x-5)}$ (5)

* **Với** $x = 5$ **ta có** (5) $\Leftrightarrow 27 = 0$! (mâu thuẫn).

Phương trình không có nghiệm $x = 5$ (6)

* Với $x>5$, đặt $\sqrt{x+4}=t\sqrt{x^2-4x-5}$, $t>0$, phương trình (5) trở thành

$$3(x^2-4x-5)t^2+2(x^2-4x-5)=5(x^2-4x-5)t \Leftrightarrow 3t^2-5t+2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}t=1\\ t=\dfrac{2}{3}\end{array}\right. \frac{1}{2}\ \textit{(thích hợp)}$$

• Với t = 1, có $x + 4 = x^2 - 4x - 5 \Leftrightarrow x^2 - 5x - 9 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{5 \pm \sqrt{61}}{2}$ (7)

Từ (2), (7) suy ra $x = \dfrac{5 + \sqrt{61}}{2}$ (8)

Với $t = \dfrac{2}{3}$, có $x + 4 = \dfrac{4}{9}(x^2 - 4x - 5) \Leftrightarrow 4x^2 - 25x - 56 = 0 \Leftrightarrow \{x = 8;\ x = -\dfrac{7}{4}\}$ (9)

Từ (2), (8) suy ra x = 8. (10)

Từ các kết quả (6), (8), (10) kết luận tập nghiệm của phương trình đã cho là

$$\{x = \frac{5 + \sqrt{61}}{2};\ x = 8\}$$

Lời bình 3. *Khác với các thí dụ 1, 2, 3 cách phân tích biểu thức nằm trong dấu căn về dạng* P(x).Q(x) *là duy nhất, trong phương trình (4) của thí dụ 4 ở trên sự phân tích ấy không duy nhất. Ta có thể xem* Q(x) *là một trong các nhị thức* (x + 4), (x – 5) *hoặc* (x + 1). *Trong ba khả năng ấy, nếu chọn* Q(x) = x – 4 *hoặc* Q(x) = x + 1 *không dẫn phương trình (4) tới phương trình đẳng cấp. Lời giải vẫn còn khó khăn !*

Thí dụ 4. Giải và biện luận theo a số nghiệm của phương trình

$$\sqrt[3]{(x+a)^2} + m\sqrt[3]{(x-a)^2} = (m+1)\sqrt[3]{x^2 - a^2} \quad (1)$$

Lời giải

Thấy rằng a = 0, phương trình (1) nghiệm $\forall x \in R, \forall m \in R$ (2)

Với $a \neq 0$ x = a không phải là nghiệm. Đặt $\sqrt[3]{x+a} = t.\sqrt[3]{x-a}$ (3)

Phương trình (1) trở thành $t^2.\sqrt[3]{(x-a)^2} + mt\sqrt[3]{(x-a)^2} = (m+1)t.\sqrt[3]{(x-a)^2}$

$\Leftrightarrow \sqrt[3]{(x-a)^2}\,[t^2 + mt - (m+1)] = 0 \Leftrightarrow t^2 + mt - (m+1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t = m \end{array}\right.$

+ Thay t = 1 vào (2) có $\sqrt[3]{x+a} = \sqrt[3]{x-a} \Leftrightarrow 0x = 2a \neq 0$. Vô nghiệm. (4)

+ Thay t = m vào (2) có $\sqrt[3]{x+a} = m\sqrt[3]{x-a} \Leftrightarrow (m^3 - 1)x = a(m^3 + 1)$ (5)

Suy ra: $\left[\begin{array}{l} (m = 1; a \neq 0):\ (5) \text{ vô nghiệm} \\ m \neq 1:\ (5) \Leftrightarrow x = \dfrac{m^3+1}{m^3-1}a, \forall a \in R \end{array}\right.$ (6)

Từ (2), (4), (6) suy ra :

* a = 0 : phương trình (1) nghiệm $\forall x \in R$ ($\forall m \in R$)

* $a \neq 0, m \neq 1$: phương trình có 1 nghiệm duy nhất $x = \dfrac{m^3+1}{m^3-1}a$

* $a \neq 0$, m = 1 : phương trình vô nghiệm.

Chú ý: *Khi phương trình đẳng cấp đang xét thoả mãn P(x).Q(x)= k (hằng số)*

Lời giải sẽ gọn hơn bởi thuật đặt ẩn phụ $t = \sqrt[n]{P(x)}$. *Chẳng hạn:*

Thí dụ 5. Giải phương trình $\sqrt[n]{\dfrac{1-x}{2+x}}+\sqrt[n]{\dfrac{2+x}{1-x}}=2$ (1)

Lời giải

Tập xác định $(1-x)(2+x)>0 \Leftrightarrow -2<x<1$ (2)

Đặt $\sqrt[n]{\dfrac{1-x}{2+x}}=t>0$ (3)

Phương trình trở thành $t+\dfrac{1}{t}=2 \Leftrightarrow t^2-2t+1=0 \Leftrightarrow (t-1)^2=0 \overset{t>0}{\Leftrightarrow} t=1$.

Thay $t=1$ vào (3) có $\sqrt[n]{\dfrac{1-x}{2+x}}=1 \Leftrightarrow 1-x=2+x \Leftrightarrow x=-\dfrac{1}{2}$ (thích hợp (2)).

Vậy $x=-\dfrac{1}{2}$ là nghiệm duy nhất của phương trình đã cho.

BÀI TẬP

Bài 1. Giải các phương trình sau:

1) $2(x^2+2)=5\sqrt{x^3+1}$ 2) $x^2+2x+4=3\sqrt{x^3+4x}$

3) $2(x^2-3x+2)=3\sqrt{x^3+8}$

Bài 2. Giải và biện luận theo a phương trình :

$$2x^2+(x^2+x+1)^2=2(x^2+1)^2+a(x^2-x+1)^2$$

Bài 3. Giải các phương trình

1) $2\sqrt[n]{(1+x)^2}+3\sqrt[n]{1-x^2}+\sqrt[n]{(1-x)^2}=0$ 2) $\sqrt{(2-\sqrt{3})x}+\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{2+\sqrt{3}}}=2$

§4. PHƯƠNG TRÌNH $(ax+b)^n=p\sqrt[n]{a'x+b'}+qx+r$ (I*)

(x - ẩn số; p, q, r, a, b, a', b' là các hằng số; $paa'\neq 0$; $n\in\{2; 3\}$)

CÁCH GIẢI

• Đặt ẩn phụ : Đặt $\sqrt[n]{a'x+b'}=\dfrac{pa'}{|pa'|}(ay+b)$.

(Nói rõ hơn : đặt $\sqrt[n]{a'x+b'}=(ay+b)$ nếu $pa'>0$,

đặt $\sqrt[n]{a'x+b'}=-(ay+b)$ nếu $pa'>0$)

Bài toán dẫn đến giải hệ phương trình hai ẩn đối với x và y:

$$\begin{cases} h(x)=Ay+Bx+C & (0\text{-}1)\\ h(y)=(A'+B)x+C' & (0\text{-}2)\end{cases}$$

• Trong trường hợp $\{A=A'$ và $C=C'\}$ (0-3), trừ theo từng vế các phương trình (0-1), (0-2) dẫn tới phương trình $h(x)+Ax=h(y)+Ay$ (0-4)

Nếu $g(t) = h(t) + At$ là hàm đơn điệu thì (0-4) $\Leftrightarrow x = y$, thay vào (0-1) có $h(x) = (A + B)x + C$. (0-5) Bài toán dẫn chúng ta đến giải phương trình (0-5).

• Thuật đặt ẩn phụ như trên còn gọi là thuật đặt "**ẩn phụ đối xứng**".

Thí dụ 1 (pa' < 0)

Giải phương trình $x^2 = 2 + \sqrt{2 - x}$ (1)

Lời giải

Đặt $\sqrt{2 - x} = -y \Rightarrow y^2 = 2 - x$, điều kiện $y \le 0$ (2)

Phương trình dã cho trở thành $x^2 = 2 - y$

Ta có hệ $\begin{cases} x^2 = 2 - y \\ y^2 = 2 - x \end{cases}$ (3)

Trừ theo từng vế có $x^2 - y^2 = x - y \Leftrightarrow (x - y)(x + y - 1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x = y & (4) \\ x = 1 - y & (5) \end{array}\right.$

+ Thay (4) vào (3) có $y^2 = 2 - y \Leftrightarrow y^2 + y - 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = 1 \text{ (loại do (2))} \\ y = -2 \end{array}\right.$

Với $y = -2$ có $x = -2$. (6)

+ Thay (5) vào (3) có $y^2 = 2 + y - 1 \Leftrightarrow y^2 - y - 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} y = \dfrac{1 + \sqrt{5}}{2} & \text{(loại do (2))} \\ y = \dfrac{1 - \sqrt{5}}{2} & (7) \end{array}\right.$

Thay (7) vào (5) có $x = 1 - \dfrac{1 - \sqrt{5}}{2} = \dfrac{1 + \sqrt{5}}{2}$ (8)

Từ (6), (8) kết luận : Phương trình đã cho có tập nghiệm là $x = -2$; $x = \dfrac{1 + \sqrt{5}}{2}$.

Lời bình.

Do bài toán chứa nhiều dấu hiệu đặc trưng, nên nó còn có một vài cách giải khác nữa, chẳng hạn bạn có thể đặt $\sqrt{2 - x} = y$ hoặc sử dụng phương pháp nâng lên luỹ thừa.

Các bạn xem lại lời giải bài này đã trình bày bằng phương pháp hằng số biến thiên.

Thí dụ 2 (pa' < 0)

Giải phương trình $4x^2 + \sqrt{3x + 1} + 5 = 13x$ (1)

Lời giải

Điều kiện: $3x + 1 \ge 0$; Viết lại (1) $\Leftrightarrow (2x - 3)^2 = -\sqrt{3x + 1} + x + 4$ (2)

Đặt $\sqrt{3x + 1} = -(2y - 3) \Rightarrow (2y - 3)^2 = 3x + 1$; Điều kiện : $3x + 1 \ge 0 \Leftrightarrow y \le \dfrac{3}{2}$ (3)

Phương trình(2) trở thành $(2x-3)^2=2y+x+1$.

Ta có hệ $\begin{cases}(2x-3)^2=2y+x+1 & (4)\\(2y-3)^2=3x+1 & (5)\end{cases}$

Trừ vế theo vế các phương trình (4), (5) có : $(x-y)(2x+2y-5)=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x=y & (6-1)\\ x=\dfrac{5}{2}-y & (6-2)\end{array}\right.$

+ Thay (6-1) vào (4) có $f(y)=4y^2-15y+8=0$ (7)

Để ý : $f\left(\dfrac{3}{2}\right)=-\dfrac{1}{3}<0 \Rightarrow$ Phương trình (7) có 2 nghiệm $y_1<\dfrac{3}{2}<y_2$.

Kết hợp với (3) có $y=\dfrac{15-\sqrt{97}}{8}$

$\Rightarrow$ Phương trình (2) có 1 nghiệm là $x=\dfrac{15-\sqrt{97}}{8}$ (8)

+ Thay (6-2) vào (4) có $h(y)=8y^2-18y+1=0$ (9)

Để ý : $h\left(\dfrac{3}{2}\right)=-8<0 \Rightarrow$ Phương trình (7) có 2 nghiệm $y_3<\dfrac{3}{2}<y_4$

Kết hợp với (3) có $y=\dfrac{9-\sqrt{73}}{8}$.

+ Thay vào (6-2) có $x=\dfrac{11+\sqrt{73}}{8}$ (10)

+ Từ (8), (10) $\Rightarrow$ Phương trình (2) có tập hợp nghiệm là :

$x=\dfrac{15-\sqrt{97}}{8}$; $x=\dfrac{11+\sqrt{73}}{8}$.

Lời bình 1

Với cách đặt $\sqrt{3x+1}=-(2y-3) \Leftrightarrow y=\dfrac{1}{2}(3-\sqrt{3x+1})$.

Gọi $u(x)=\dfrac{1}{2}(3-\sqrt{3x+1})$. Hàm số $y=u(x)$ đồng biến trên tập xác định của nó.

Với mỗi $y\in\left(-\infty;\dfrac{3}{2}\right]\ \exists! x\in\left[-\dfrac{1}{3};\infty\right)$ thoả $y=u(x)$. Vì thế trong phương trình (2), điều kiện $3x+1\ge 0 \Leftrightarrow y\le\dfrac{3}{2}$. Nghiệm của hệ (*) là cặp (x, y) thoả mãn $y\le\dfrac{3}{2}$ Đó là câu trả lời tại sao trong phép thế vào phương trình (4) ta cố ý dẫn tới (7), (9) là các phương trình với ẩn y.

Chú ý : Nói về điều kiện (0-3)

$$\begin{cases} A = A' \\ C = C' \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} pa = a' - q \\ pb + r = b' \end{cases} \\ \begin{cases} -pa = a' - q \\ -pb + r = b' \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b = 0 \Rightarrow \begin{cases} r = b' \\ \dfrac{pa'}{|pa'|} \cdot p = \dfrac{a' - q}{a} \end{cases} \\ b \neq 0 \Rightarrow \dfrac{pa'}{|pa'|} \cdot p = \dfrac{a' - q}{a} = \dfrac{b' - r}{b} \end{array}\right.$$

Thí dụ 3 ($pa' > 0$)

Giải phương trình $32x^2 + 32x = \sqrt{2x + 15} + 20$ (1)

Lời giải

Điều kiện : $2x + 15 \geq 0$; (1) $\Leftrightarrow$ $2(4x + 2)^2 = \sqrt{2x + 15} + 28$ (2)

Đặt $\sqrt{2x + 15} = 4y + 2 \Rightarrow (4y + 2)^2 = 2x + 15$.

Điều kiện : $2x + 15 \geq 0 \Leftrightarrow y \geq -\dfrac{1}{2}$. (3)

Phương trình (2) trở thành $(4x + 2)^2 = 2y + 15$.

Ta có hệ $\begin{cases} (4x + 2)^2 = 2y + 15 & (4) \\ (4y + 2)^2 = 2x + 15 & (5) \end{cases}$

Trừ vế theo vế các phương trình (4), (5) có : $(x - y)(8x + 8y + 9) = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x = y & (6-1) \\ x = -y - \dfrac{9}{8} & (6-2) \end{array}\right.$$

+ Thay (6-1) vào (5) có $16y^2 + 14y - 11 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = \dfrac{1}{2} \\ y = -\dfrac{11}{8} \text{ (loại)} \end{array}\right.$

Với $y = \dfrac{1}{2}$, thế vào (6-1) có $x = \dfrac{1}{2}$ (7)

+ Thay (6-2) vào (4) có $f(y) = 16y^2 + 18y - \dfrac{55}{4} = 0$ (8)

Để ý: $f\left(-\dfrac{1}{2}\right) = -\dfrac{37}{4} < 0 \Rightarrow$ Phương trình(8) có 2 nghiệm y_1, y_2: $y_1 < -\dfrac{1}{2} < y_2$.

Kết hợp với (3) có $y = \dfrac{-9 + \sqrt{221}}{16}$, vào (6-2) có $x = -\dfrac{9 + \sqrt{221}}{16}$ (9)

+ Từ (8), (9) $\Rightarrow$ Tập nghiệm của phương trình (1) là $x = \dfrac{1}{2}$; $x = -\dfrac{9 + \sqrt{221}}{16}$.

Lời bình 2

• *Phương trình (1) tương đương với hệ (4), (5) - đó là hệ phương trình hai ẩn đối xứng kiểu 2. Người ta nói (1) là "phương trình khả nghịch".*

• *Thuật đặt ẩn phụ trên bao giờ cũng dẫn phương trình khả nghịch đến hệ đối xứng hai ẩn kiểu 2. ($A = A'$; $B = 0$; $C = C'$).*

• *Điều kiện cần để phương trình (1') trở thành phương trình khả nghịch là $q = 0$.*

Thí dụ 4

Giải phương trình $8x^3+53x = 36x^2+\sqrt[3]{3x-5}+25$ (1)

Lời giải

Viết lại (1) $\Leftrightarrow (2x-3)^3 = \sqrt[3]{3x-5}+x-2$ (2). Đặt $\sqrt[3]{3x-5} = 2y-3$

Ta có (2) $\Leftrightarrow \begin{cases}(2x-3)^3 = 2y+x-5 & (2.2)\\ (2y-3)^3 = 3x-5 & (2.3)\end{cases}$

Trừ vế theo vế các phương trình sẽ có

$$(x-y)\Bigg[\underbrace{\left(2x+y-\frac{9}{2}\right)^2+\frac{3(2y-3)^2}{4}+1}_{\geq 1}\Bigg] = 0 \Leftrightarrow x = y$$

Suy ra $(2x-3)^3 = 3x-5 \Leftrightarrow (x-2)(8x^2-20x+11) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = 2\\ x = \dfrac{5\pm\sqrt{3}}{4}\end{array}\right.$

Thí dụ 5

Chứng tỏ với mọi a phương trình sau luôn có nghiệm : $a^3\cos^4x+\sin x-a = 0$ (1)

Lời giải

Trường hợp 1 : $a = 0$, ta có (1) $\Leftrightarrow \sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi,\ k\in Z$ (2)

Trường hợp 2 : $a \neq 0$, ta có (1) $\Leftrightarrow (a^2\cos^2x)^2 = a^2 - a\sin x$

$\Leftrightarrow (a\sin x)^2 = a^2-\sqrt{a^2-a\sin x}$ (3)

Đặt $a\sin x = X$, $|X| \leq a$. Phương trình trở thành $X^2 = a^2-\sqrt{a^2-X}$.

Đặt $\sqrt{a^2-X} = Y$. Điều kiện $|X| \leq |a| \Leftrightarrow Y \geq 0$.

Ta có hệ : (4) $\begin{cases}X^2 = a^2-Y & (4.1)\\ Y^2 = a^2-X & (4.2)\\ Y \geq 0 & (4.3)\end{cases}$

Phương trình (3) có nghiệm $\Leftrightarrow$ Hệ (4) có nghiệm

Từ (4.1), (4.2) $\Rightarrow (X-Y)(X+Y-1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll}X = Y & (5.1)\\ X = 1-Y & (5.2)\end{array}\right.$

Với X = Y, thay vào (4.2) có $Y^2 + Y - a^2 = 0$.

Dễ thấy $\forall a \neq 0$, phương trình luôn có 2 nghiệm $Y_1 < 0 < Y_2$

$\Rightarrow$ Hệ (4) có nghiệm $X = Y = Y_2 > 0$ (6)

Từ (2), (5) đủ để kết luận (1) có nghiệm với mọi a. (đpcm)

BÀI TẬP

Bài 1. Giải các phương trình

1. $x^2 = \sqrt{2-x} + 2$

2. $x^2 + 4x = \sqrt{x+6}$

3. $x^2 - 4x + \sqrt{2x+5} = 0$

4. $2x^2 + 4x = \sqrt{\dfrac{x+3}{2}}$

5. $x^2 - 4x - 3 = \sqrt{x+5}$

6. $8x^2 + 8x + 1 = \sqrt{x+1}$

7. $x + \sqrt{3+\sqrt{x}} = 3$

8. $x^3 + 2 = 3\sqrt[3]{3x-2}$

9. $x^2 - 2x = 2\sqrt{2x-1}$

10. $x^3 + 1 = 2\sqrt[3]{2x-1}$

11. $(8\cos^3 x + 1)^3 = 162\cos 2x - 27$

12. $2x^2 - 4x + 3 = \sqrt{\dfrac{8x^2 - 15x + 9}{2}}$

13. $\sqrt[3]{81x-8} = x^3 - 2x^2 + \dfrac{4x}{3} - 2$

14. $x^2 - x - 1000\sqrt{1+8000x} = 1000$

15. (HSG Quốc gia 2002): $\sqrt{4-3\sqrt{10-3x}} = x - 2$

Bài 2. Giải và biện luận theo a các phương trình

1) $x^3 + (2 - a^2)a = 2\sqrt[3]{2x + (a^2 - 2)a}$

2) $x^3 + (3 - a^2)a = 3\sqrt[3]{3x + (a^2 - 3)a}$

§5. PHƯƠNG TRÌNH $ax^2+bx+c = \sqrt{px^2+qx+r}$ $(ap \neq 0)$ (1)

CÁCH GIẢI

Có thể giải bằng phương pháp đặt ẩn phụ theo hai cách 2 sau đây

Cách 1 : Nếu $\dfrac{a}{p} = \dfrac{b}{q}$, đặt ẩn phụ $t = \sqrt{px^2+qx+r}$, dẫn đến giải phương trình bậc hai $At^2 + Bt + C = 0$

Cách 2 : Nếu $\begin{cases} p = -b \\ q = \dfrac{1-b^2}{a} \\ r = -\dfrac{c(1+b)}{a} \end{cases}$ → **đặt $t = ax^2+bx+c$** dẫn đến giải hệ phương trình đối xứng kiểu 2 → $\begin{cases} ax^2 + bx + c = t \\ at^2 + bt + c = x \end{cases}$

Thí dụ 1. Giải phương trình $x^2 + 6x - 14 = \sqrt{98 - 35x - 6x^2}$ (1)

Lời giải

Đặt $x^2 + 6x - 14 = t$, điều kiện $t \geq 0$ (2). Sẽ có $98 - 35x - 6x^2 = x - 6t + 14$

Phương trình đã cho trở thành $t = \sqrt{x - 6t + 14} \Leftrightarrow t^2 + 6t - 14 = x$. Ta có hệ

(*) $\begin{cases} x^2 + 6x - 14 = t & (3) \\ t^2 + 6t - 14 = x & (4) \end{cases}$. Trừ vế theo vế các phương trình (3), (4) ta có

$x^2 - t^2 + 6(x - t) = t - x \Leftrightarrow (x - t)(x + t + 7) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x = t & (5.1) \\ x = -t - 7 & (5.2) \end{array}\right.$

+ Thay (5.1) vào (4) có $t^2 + 6t - 14 = t \Leftrightarrow t^2 + 5t - 14 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} t = 2 & \text{(thích hợp (2))} \\ t = -7 & \text{(loại do (2))} \end{array}\right.$

Với $t = 2 \Rightarrow$ Phương trình có nghiệm $x = 2$ (6)

+ Thay (5.2) vào (4) có $t^2 + 6t - 14 = -t - 7 \Leftrightarrow t^2 + 7t - 7 = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} t = \dfrac{-7 - \sqrt{77}}{2} & \text{(loại do (2))} \\ t = \dfrac{-7 + \sqrt{77}}{2} & \text{(thích hợp (2))} \end{array}\right.$

Với $t = \dfrac{\sqrt{77} - 7}{2}$, thay vào (5.2) có $x = -\dfrac{7 + \sqrt{77}}{2}$ (7)

- Từ (6), (7) kết luận phương trình đã cho có tập nghiệm là

$$\left\{x = 2; x = -\frac{7 + \sqrt{77}}{2}\right\}$$

Chú ý. Phương trình (1) $\Leftrightarrow \begin{cases} (x^2 + 6x - 14)^2 = 98 - 35x - 6x^2 \\ x^2 + 6x - 14 \geq 0 \end{cases}$

Vì thế nên trong thuật giải phương trình trên, chúng ta không phải tìm tập xác định của phương trình, bởi lẽ điều kiện $98 - 35x - 6x^2 \geq 0 \Leftrightarrow$ điều kiện $t \geq 0$. Đó cũng là điều cắt nghĩa tại sao ta luôn thế x bởi t trong (5.1), (5.2) vào (4) để dẫn đến giải phương trình đối với ẩn t.

Thí dụ 2

Giải phương trình $2x^2 - 2x - 5 = \sqrt{\dfrac{4x^2 - 3x - 5}{2}}$ (1)

Lời giải

Đặt $2x^2 - 2x - 5 = y \geq 0$ (2), sẽ có $4x^2 - 3x - 5 = 2y + x + 5$.

Phương trình (1) trở thành $y = \sqrt{\dfrac{2y + x + 5}{2}} \Leftrightarrow 2y^2 = 2y + x + 5 \Leftrightarrow 2y^2 - 2y - 5 = x$

Ta có hệ $\begin{cases} 2x^2 - 2x - 5 = y & (3) \\ 2y^2 - 2y - 5 = x & (4) \end{cases}$

Trừ theo từng vế các phương trình (3), (4) ta có $2(x^2 - y^2) - 2(x - y) = y - x$

$\Leftrightarrow (x - y)(2x + 2y - 1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x = y & (5.1) \\ x = \frac{1}{2} - y & (5.2) \end{array}\right.$

Thế vào (4) :

+ Với $x = y$ có $2y^2 - 2y - 5 = y \Leftrightarrow 2y^2 - 3y - 5 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = -1 \text{ [loại do (2)]} \\ y = \frac{5}{2} \text{ [thích hợp (2)]} \end{array}\right.$

$\Rightarrow$ phương trình có nghiệm $x = \frac{5}{2}$ (6)

+ Với $x = \frac{1}{2} - y$ có: $2y^2 - 2y - 5 = \frac{1}{2} - y \Leftrightarrow 2y^2 - y - \frac{11}{2} = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = \frac{1 - 3\sqrt{5}}{4} \text{ (loại do (2))} \\ y = \frac{1 + 3\sqrt{5}}{4} \end{array}\right.$

Thay $y = \frac{1 + 3\sqrt{5}}{4}$ vào (5.2) có $x = \frac{1 - 3\sqrt{5}}{4}$ (7)

- Từ (6), (7) kết luận phương trình đã cho tập nghiệm là : $\left\{x = \frac{5}{2};\ x = \frac{1 - 3\sqrt{5}}{4}\right\}$

Thí dụ 3

Giải phương trình $x^2 + 2x + 12 = 6\sqrt{2x^2 + 4x + 4}$ (1)

Lời giải

Để ý: $2x^2 + 4x + 4 = x^2 + (x+2)^2 > 0, \forall x \in R$ $\Rightarrow$ Phương trình có tập xác định là R.

- Thấy rằng $\frac{1}{2} = \frac{2}{4}$ nên đặt $t = \sqrt{2x^2 + 4x + 4}$. Điều kiện $t > 0$ (2)

Suy ra $x^2 + 2x + 12 = \frac{1}{2}t^2 + 10$. (3)

Phương trình (2) trở thành $\frac{1}{2}t^2 + 10 = 6t \Leftrightarrow t^2 - 12t + 20 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 2 \\ t = 10 \end{array}\right.$

(thích hợp (2))

- Thay vào (3) :
  + Với $t = 2$ có $x^2 + 2x = 0 \Leftrightarrow \{x = 0;\ x = -2\}$ (4)
  + Với $t = 10$ có $x^2 + 2x - 48 = 0 \Leftrightarrow \{x = 6;\ x = -8\}$ (5)
- Từ (4), (5) suy ra tập nghiệm của phương trình là $\{x = -8;\ x = -2;\ x = 0;\ x = 6\}$

Thí dụ 4

Giải phương trình $2x^2 - 6x+5=3\sqrt[3]{x^2-3x+2}$ (1)

Lời giải

Tập xác định R

Để ý $\frac{2}{1}=\frac{6}{3}$ nên đặt $t=\sqrt[3]{x^2-3x+2} \Rightarrow 2x^2-6x+5=2t^3+1$. (2)

Phương trình (1) trở thành $2t^3+1=3t$ (*) $\Leftrightarrow 2t^3-3t+1=0$

$\Leftrightarrow (t-1)(2t^2+2t-1)=0 \Leftrightarrow \left\{t=1;\ t=\frac{-1\pm\sqrt{3}}{2}\right\}$. Thay vào (2) :

+ Với $t=1$ có $2x^2-6x+5=3 \Leftrightarrow x^2-3x+1=0 \Leftrightarrow x=\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$ (3)

Chú ý. Từ (*) suy ra (2) $\Leftrightarrow 2x^2-6x+5=3t$ (4), nên thay vì thay vào phương trình (2), ta thay các giá trị của t vào phương trình (4).

+ Với $t=-\frac{1+\sqrt{3}}{2}$ ta có $2x^2-6x+5=-3\frac{1+\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow 2x^2-6x+\frac{13+3\sqrt{3}}{2}=0$.

Vô nghiệm do $\Delta' = 9-(13+3\sqrt{3}) = -4-3\sqrt{3}<0$ (5)

+ Với $t=-\frac{1-\sqrt{3}}{2}$ có có $2x^2-6x+5=-3\frac{1-\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow 2x^2-6x+\frac{13-3\sqrt{3}}{2}=0$.

$\Delta' = 9-(13-3\sqrt{3}) = 3\sqrt{3}-4;\ x=\frac{3\pm\sqrt{3\sqrt{3}-4}}{2}$ (6)

Từ (3), (5), (6) suy ra tập nghiệm của phương trình (1) là

$$\left\{x=\frac{3\pm\sqrt{5}}{2};\ x=\frac{3\pm\sqrt{2\pm3\sqrt{3}}}{2}\right\}$$

Thí dụ 5

Cho phương trình $(x-3)(x+1)+4(x-3)\sqrt{\frac{x+1}{x-3}}=m$ (1)

a) Giải phương trình khi $m=-3$.
b) Với giá trị nào của m thì phương trình có nghiệm ?

Lời giải

Điều kiện : $\frac{x+1}{x-3}\geq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x\leq -1\\ x>3\end{array}\right.$ (2). Đặt $t=(x-3)\sqrt{\frac{x+1}{x-3}}$ (3)

Suy ra

$$\left\{\begin{array}{l}\left[\begin{array}{l}x<-1 \Leftrightarrow t<0\\ x>3 \Leftrightarrow t>0\end{array}\right.\\ t^2=(x-3)(x+1) \Leftrightarrow x^2-2x-3-t^2=0\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{ll}x=1+\sqrt{4+t^2},\ t>0 & (4.1)\\ x=1-\sqrt{4+t^2},\ t\leq 0 & (4.2)\end{array}\right.$$

Phương trình (1) trở thành : $t^2 + 4t - m = 0$ (5)

a) Với m = –3, sẽ có (5) $\Leftrightarrow t^2 + 4t + 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = -1 < 0 \\ t = -3 < 0 \end{array}\right.$.

Thay vào (4.2) : $\left[\begin{array}{ll} + \text{ với } t = -1 \text{ có } x = 1 - \sqrt{5} & (6) \\ + \text{ với } t = -3 \text{ có } x = 1 - \sqrt{13} & (7) \end{array}\right.$

Từ (6), (7) suy ra tập hợp nghiệm của phương trình khi m = –3 là

$$\left\{x = 1 - \sqrt{5}; x = 1 - \sqrt{13}\right\}$$

b) Thấy rằng với mọi t, phương trình (1) luôn có nghiệm hoặc (4.1) hoặc (4.2)

Bởi vậy phương trình (1) có nghiệm khi và chỉ khi phương trình (5) có nghiệm $\Leftrightarrow \Delta'_t \geq 0 \Leftrightarrow 4 + m \geq 0 \Leftrightarrow m \geq -4$.

Chú ý. *Phương trình (PT) trên thuộc dạng* $(x + a)(x + b) + q(x + a)\sqrt{\dfrac{x+b}{x+a}} + r = 0$

Ẩn phụ của phương trình này là $t = (x + a)\sqrt{\dfrac{x+b}{x+a}}$, $\left|\begin{array}{l} t < 0 \Leftrightarrow x < \min(-a; -b) \\ t > 0 \Leftrightarrow x > \max(-a; -b) \end{array}\right.$

§6. PHÉP THẾ TRONG VỚI PHƯƠNG TRÌNH

$$\sqrt[3]{A(x)} \pm \sqrt[3]{B(x)} = \sqrt[3]{C(x)} \qquad (1)$$

(trong đó A(x), B(x), C(x) là các đa thức bậc không quá 3)

CÁCH GIẢI

Lập phương hai vế phương trình ta có

$$(1) \Leftrightarrow A(x) \pm B(x) \pm 3\sqrt[3]{A(x)B(x)}\left(\sqrt[3]{A(x)} \pm \sqrt[3]{B(x)}\right) = C(x) \qquad (2)$$

Thế (1) vào (2) ta có : $A(x) \pm B(x) \pm 3\sqrt[3]{A(x)B(x)}\sqrt[3]{C(x)} = C(x)$

$\Leftrightarrow A(x) \pm B(x) - C(x) = \mp 3\sqrt[3]{A(x)B(x)C(x)}$

$\Leftrightarrow [A(x) \pm B(x) - C(x)]^3 = \mp 27A(x)B(x)C(x)$ (3)

Việc giải phương trình (1) đưa về giải phương trình hữu tỉ (3).

Thí dụ 1

Giải các phương trình :

a) $\sqrt[3]{2x-1} + \sqrt[3]{x-1} = \sqrt[3]{3x+1}$ b) $\sqrt[3]{x+1} + \sqrt[3]{x-1} = \sqrt[3]{5x}$

Lời giải

a) $\sqrt[3]{2x-1} + \sqrt[3]{x-1} = \sqrt[3]{3x+1}$ (1)

Tập xác định R .

$$(1) \Leftrightarrow 3x - 2 + 3\sqrt[3]{(2x-1)(x-1)}\Big(\underbrace{\sqrt[3]{2x-1} + \sqrt[3]{x-1}}_{\sqrt[3]{3x+1}}\Big) = 3x + 1 \qquad (2)$$

Thay (1) vào (2) có $\sqrt[3]{(2x-1)(x-1)}\sqrt[3]{3x+1} = 1$

$\Leftrightarrow (2x^2 - 3x + 1)(3x + 1) = 1 \Leftrightarrow x^2(6x - 7) = 0 \Leftrightarrow \{x = 0;\ x = \dfrac{7}{6}\}$

• Thử lại : Thay các kết quả trên vào (1) thấy x = 0 không thoả mãn, còn giá trị $x = \dfrac{7}{6}$ thoả mãn. Đó là nghiệm duy nhất của phương trình đã cho .

• **Chú ý**. *Phép thế (2) vào (3) được gọi là* "***phép thế trong***" *Cần hiểu rằng (2) không phải là hằng đẳng thức nên phép thế trong là phép biến đổi không tương đương. Nó chỉ đúng với những giá trị x là nghiệm của phương trình (1) mà thôi. Phương trình (3) là phương trình hệ quả của phương trình(2). Bởi thế khi tìm được các giá trị của x, phải thử lại.*

b) $\sqrt[3]{x+1} + \sqrt[3]{x-1} = \sqrt[3]{5x}$ (1)

Tập xác định R. Lập phương hai vế các phương trình (1) ta có

$$(1) \Leftrightarrow 2x + 3\sqrt[3]{x^2 - 1}\Big(\underbrace{\sqrt[3]{x+1} + \sqrt[3]{x-1}}_{\sqrt[3]{5x}}\Big) = 5x \qquad (2)$$

Thay (1) vào (2) có :

$$\sqrt[3]{(x^2 - 1).5x} = x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ 5(x^2 - 1) = x^2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{x = 0;\ x = \pm\frac{\sqrt{5}}{2}\right\}$$

Thay các giá trị của x vừa tìm được vào phương trình (1) thấy đúng. Đó là tập nghiệm của phương trình đã cho.

Thí dụ 2.
Giải bất phương trình $\sqrt[3]{2x+1} + \sqrt[3]{6x+1} > \sqrt[3]{2x-1}$ (1)

Lời giải

Trước hết $a \geq b \Leftrightarrow a^3 \geq b^3\ \forall a, b \in R$

Thật vậy : $\forall a, b \in R$ luôn có $(a^2 + ab + b^2) \geq 0$

Nên: $a \geq b \Leftrightarrow a - b \geq 0 \Leftrightarrow (a - b)(a^2 + ab + b^2) \geq 0 \Leftrightarrow (a^3 - b^3) \geq 0$ (đpcm)

Ta có $(1) \Leftrightarrow \sqrt[3]{2x-1} - \sqrt[3]{2x+1} < \sqrt[3]{6x+1}$

$$\Leftrightarrow -2 - 3\sqrt[3]{(2x-1)(2x+1)}\left(\sqrt[3]{2x-1} - \sqrt[3]{2x+1}\right) < 6x + 1$$

$$\Leftrightarrow \sqrt[3]{(2x-1)(2x+1)}\left(\sqrt[3]{2x-1} - \sqrt[3]{2x+1}\right) > 2x + 1$$

$$\Leftrightarrow \sqrt[3]{2x+1}\left[\sqrt[3]{(2x-1)^2}+\sqrt[3]{(2x-1)(2x+1)}+\sqrt[3]{(2x+1)^2}\right]>0 \quad (2)$$

Để ý : $\left[\sqrt[3]{(2x-1)^2}+\sqrt[3]{(2x-1)(2x+1)}+\sqrt[3]{(2x+1)^2}\right]>0, \forall x \in R$

Nên (2) $\Leftrightarrow \sqrt[3]{2x+1}>0 \Leftrightarrow x>-\dfrac{1}{2}$.

Đó là tập nghiệm của bất phương trình đã cho.

§7.GIẢI PHƯƠNG TRÌNH, BẤT PHƯƠNG TRÌNH VÔ TỈ BẰNG TOẠ ĐỘ VECTƠ

❶ Các kiến thức sẽ sử dụng

• *Tích vô hướng* : Cho $\vec{a}=(x_1;y_1)$; $\vec{b}=(x_2;y_2) \Rightarrow \begin{cases}\vec{a}.\vec{b}=x_1y_1+x_2y_2\\ |\vec{a}|=\sqrt{x_1^2+y_1^2}\end{cases}$

• *Bất đẳng thức*:

* $|\vec{a}||\vec{b}|\geq \vec{a}.\vec{b}$ (1) * $|\vec{a}|+|\vec{b}|\geq|\vec{a}+\vec{b}|$ (2) * $|\vec{a}|-|\vec{b}|\leq|\vec{a}+\vec{b}|$ (3)

Dấu đẳng thức trong (1), (2) có khi và chỉ khi $\vec{a},\vec{b}$ cùng hướng

Dấu đẳng thức trong (3) có khi và chỉ khi xảy ra một trong hai trường hợp :

$\vec{b}=\vec{0}$; hoặc $\vec{a}$, $\vec{b}$ ngược hướng.

• *Quy ước* :

*) *Các bất đẳng thức trên được gọi là các bất đẳng thức **"cơ bản"**.*

*) *Phương trình diễn tả dấu đẳng thức xảy ra trong các bất đẳng thức "cơ bản" (ở trên), nếu có mẫu thức bằng không thì tử thức cũng bằng không.*

❷ Hai quy trình sử dụng toạ độ vectơ vào giải phương trình (PT), bất phương trình (BPT)

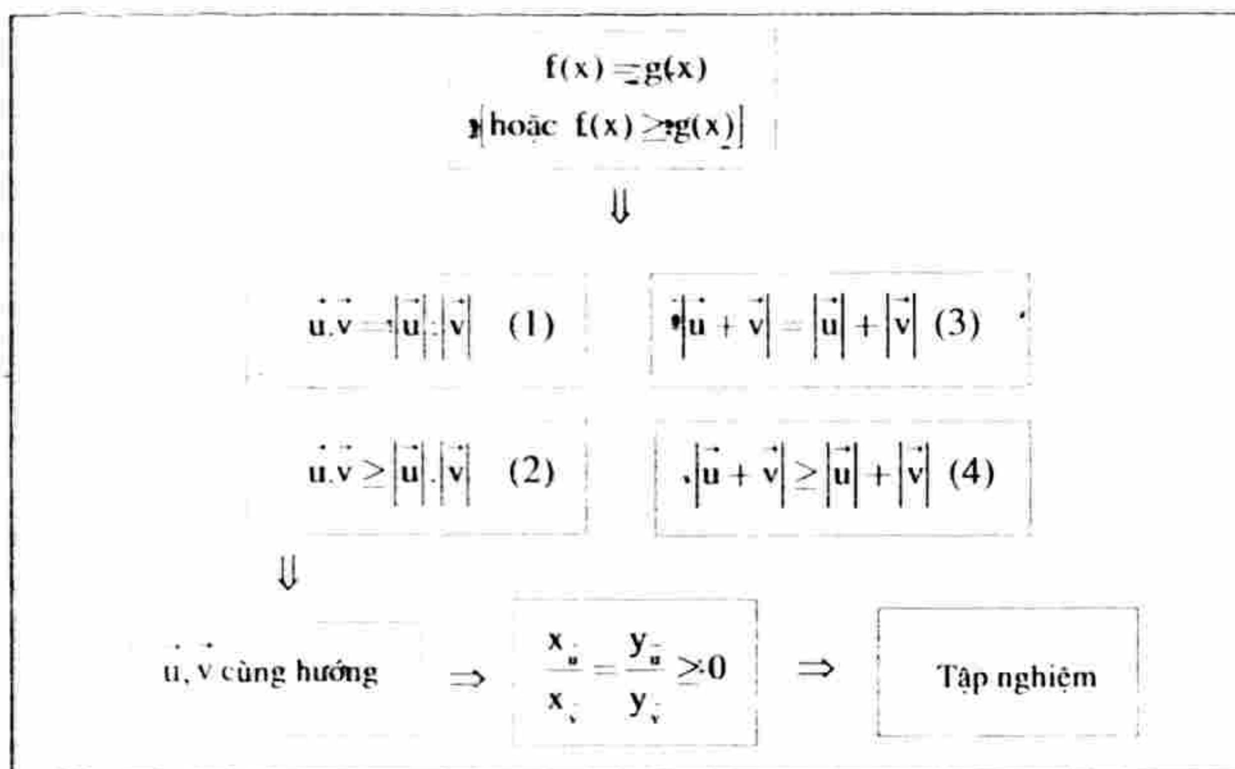
Quy trình I

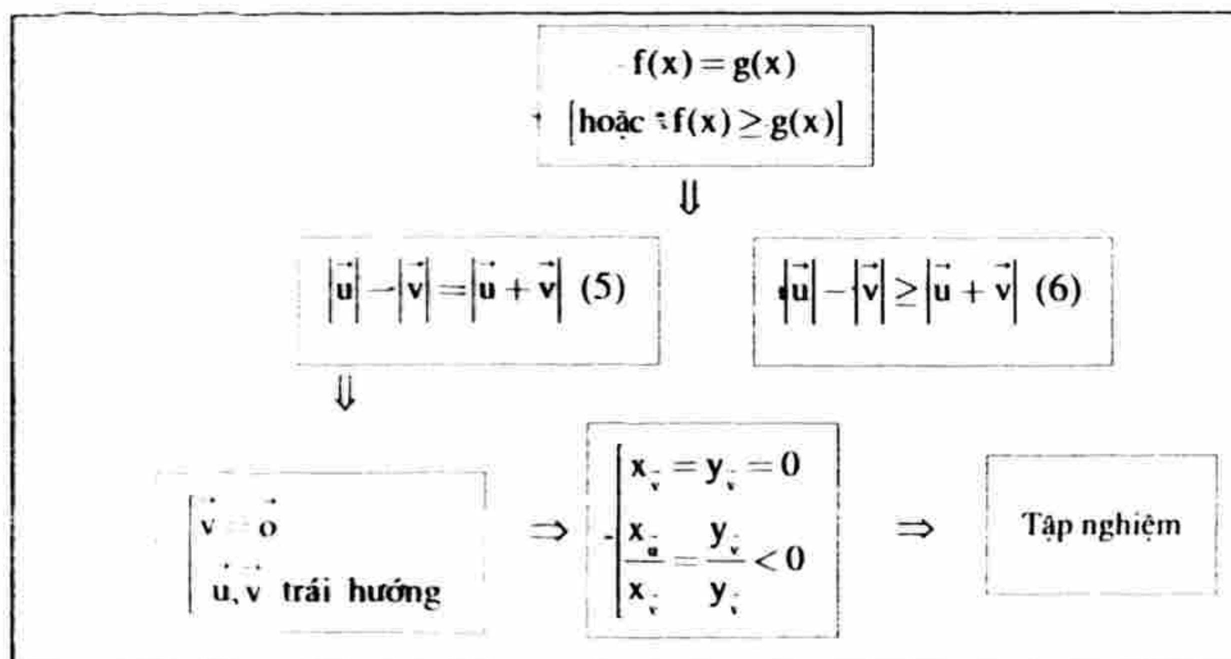
Để giải PT f(x)=g(x) [hoặc BPT f(x)≥ g(x)]

Ta đồng thời biến đổi f(x) thành vế trái (VT), còn g(x) thành vế phải (VP) tương ứng của 1 trong 6 hệ thức :

$\vec{a}.\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|$	$|\vec{a}+\vec{b}|=|\vec{a}|+|\vec{b}|$	$|\vec{a}|-|\vec{b}|=|\vec{a}+\vec{b}|$
$\vec{a}.\vec{b}\geq|\vec{a}||\vec{b}|$	$|\vec{a}+\vec{b}|\geq|\vec{a}|+|\vec{b}|$	$|\vec{a}|-|\vec{b}|\geq|\vec{a}+\vec{b}|$

Kết hợp với BĐT "cơ bản" sẽ dẫn tới sự *khẳng định* như hai sơ đồ dưới đây.





Quy trình 2

Để giải phương trình $f(x)=g(x)$ [hoặc bất phương trình $f(x)\geq g(x)$]

Trong đó

- $f(x)$ không có dạng biểu thức toạ độ của tích vô hướng.
- $g(x)$ biến đổi được thành một vế của 1 trong 3 BĐT "cơ bản" (2), (4), (6)

Ta đánh giá $g(x)$ có: $g(x) \geq h(x)$ [*hoặc* $g(x) \leq h(x)$] (*Nhờ các BĐT trên*)

Dấu đẳng thức có khi $x \in E_1$ (7)

Do vậy, từ $f(x) = g(x)$ [*hoặc* $f(x) \geq g(x)$] $\Rightarrow f(x) \geq h(x)$ [*hoặc* $f(x) \leq h(x)$]

$\Leftrightarrow x \in E_2$ (8)

Từ (7), (8) kết luận : Nghiệm của PT(BPT) là $x \in E_1 \cap E_2$

(*Chú ý* : Nếu $f(x)$, $g(x)$ là các hàm đại số thì trước khi dẫn tới (8), các phép biến đổi thường xuất hiện $[r(x)]^2 \le 0$.)

❸ Các thí dụ

Thí dụ 1. Giải phương trình $\sqrt{9x^3 - 18x^2} + \sqrt{36x^2 - 9x^3} = 9 + x^2$ (1)

Lời giải

Tập xác định : $D = [2; 4]$ (2)

Xét các véctơ $\vec{u} = (1; 1)$, $\vec{v} = \left(\sqrt{9x^3 - 18x^2}; \sqrt{36x^2 - 9x^3}\right)$

Suy ra : $|\vec{u}| = \sqrt{2}$, $|\vec{v}| = \sqrt{9x^3 - 18x^2 + 36x^2 - 9x^3} = 3|x|.\sqrt{2} = 3x.\sqrt{2}$ $(x \in D)$

Từ đó $\Rightarrow |\vec{u}||\vec{v}| = 6x$, $\vec{u}.\vec{v} = \sqrt{9x^3 - 18x^2} + \sqrt{36x^2 - 9x^3}$.

Do vậy (1) $\Rightarrow 9 + x^2 = \vec{u}.\vec{v} \le |\vec{u}||\vec{v}| = 6x \Rightarrow 9 + x^2 \overset{(1)}{\le} 6x$ (3)

Dấu đẳng thức có khi $\vec{u}, \vec{v}$ cùng hướng $\Leftrightarrow \dfrac{\sqrt{9x^3 - 18x^2}}{1} = \dfrac{\sqrt{36x^2 - 9x^3}}{1}$

$\Leftrightarrow 9x^3 - 18x^2 = 36x^2 - 9x^3 \Leftrightarrow x^2(x - 3) = 0 \overset{(2)}{\Leftrightarrow} x = 3$ (4)

Xét bất phương trình (3) : Ta có (3) $\Leftrightarrow (x - 3)^2 \le 0 \Leftrightarrow x = 3$ (5)

Từ (4), (5) kết luận x=3 là nghiệm duy nhất của phương trình đã cho.

Chú ý. *Chúng ta còn trở lại Thí dụ này với lời giải bằng phương pháp đánh giá bởi Thí dụ 10, mục III. §7 chươngV.*

Thí dụ 2

Giải bất phương trình $(3 - x)\sqrt{x - 1} + \sqrt{5 - 2x} \ge \sqrt{40 - 34x + 10x^2 - x^3}$ (1)

Lời giải

Điều kiện : $1 \le x \le \dfrac{5}{2}$

Xét hai vectơ $\vec{u} = (3 - x; 1)$, $\vec{v} = \left(\sqrt{x - 1}; \sqrt{5 - 2x}\right)$,

Sẽ có $|\vec{u}| = \sqrt{x^2 - 6x + 10}$, $|\vec{v}| = \sqrt{4 - x}$, VT(1) $= \vec{u}.\vec{v}$,

$|\vec{u}||\vec{v}| = \sqrt{(4 - x)(x^2 - 6x + 10)} = \sqrt{40 - 34x + 10x^2 - x^3}$

Do vậy (1) $\Leftrightarrow \vec{u}.\vec{v} \ge |\vec{u}||\vec{v}| \Rightarrow \vec{u}$ và $\vec{v}$ là hai vectơ cùng hướng

$\Leftrightarrow \dfrac{3 - x}{\sqrt{x - 1}} = \dfrac{1}{\sqrt{5 - 2x}} \Rightarrow \dfrac{(3 - x)^2}{x - 1} = \dfrac{1}{5 - 2x} > 0 \Rightarrow 2x^3 - 17x^2 + 49x - 46 = 0$

$\Leftrightarrow (x-2)(2x^2-13x+23)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-2=0 \\ 2x^2-13x+23=0\ (VN) \end{array}\right. \Leftrightarrow x=2$

(thích hợp (2)) Vậy PT(1) có duy nhất một nghiệm là x = 2.

Thí dụ 3

Giải phương trình $\left|\sqrt{x^2+2x+5}-\sqrt{x^2-4x+40}\right| = x^2+5x+\dfrac{45}{4}$ (1)

Lời giải

Tập xác định R.

Đặt $f(x)=\left|\sqrt{x^2+2x+5}-\sqrt{x^2-4x+40}\right| = \left|\sqrt{(x+1)^2+4}-\sqrt{(2-x)^2+36}\right|$

Xét các vectơ $\vec{u}=(x+1;-2)$, $\vec{v}=(2-x;6)$

Sẽ có : $\vec{u}+\vec{v}=(3;4)$, $|\vec{u}+\vec{v}|=5$, $|\vec{u}|=\sqrt{(x+1)^2+4}$, $|\vec{v}|=\sqrt{(2-x)^2+36}$

Ta có $f(x)=\left||\vec{u}|-|\vec{v}|\right| \le |\vec{u}+\vec{v}|=5$ (2)

Dấu đẳng thức có khi xảy ra một trong ba trường hợp $\vec{u}=\vec{0}$, hoặc $\vec{v}=\vec{0}$, hoặc $\vec{u}$ ngược hướng với $\vec{v}$.

Khả năng $\vec{u}=\vec{0}$, $\vec{v}=\vec{0}$ không thể xảy ra do $y_{\vec{u}}=-2\neq 0$, $y_{\vec{v}}=6\neq 0$. (3)

Khả năng $\vec{u},\vec{v}$ ngược hướng $\Leftrightarrow \dfrac{x+1}{2-x}=\dfrac{-2}{6}<0 \Leftrightarrow x=-\dfrac{5}{2}$. (4)

Từ (1), (2), (3), (4) $\Rightarrow x^2+5x+\dfrac{45}{4}\le 5 \Leftrightarrow x^2+5x+\dfrac{25}{4}\le 0 \Leftrightarrow \left(x+\dfrac{5}{2}\right)^2\le 0$

$\Leftrightarrow x=-\dfrac{5}{2}$ (5)

Từ (3), (5) kết luận phương trình có một nghiệm duy nhất là $x=-\dfrac{5}{2}$.

Thí dụ 4

Giải phương trình $\sqrt{x^2-2x+5}+\sqrt{x^2+2x+10}=\sqrt{29}$ (1)

Lời giải

Xét hai vectơ $\vec{u}=(1-x;2)$, $\vec{v}=(1+x;3)$.

Ta có $|\vec{u}|=\sqrt{x^2-2x+5}$, $|\vec{v}|=\sqrt{x^2+2x+10}$, $\vec{u}+\vec{v}=(2;5)$, $|\vec{u}+\vec{v}|=\sqrt{29}$

Suy ra (1) $\Leftrightarrow |\vec{u}|+|\vec{v}|=|\vec{u}+\vec{v}| \Leftrightarrow \vec{u}$ và $\vec{v}$ cùng hướng $\Leftrightarrow \dfrac{1-x}{1+x}=\dfrac{2}{3}>0$

$\Leftrightarrow x=\dfrac{1}{5}$. Vậy phương trình có một nghiệm duy nhất là $x=\dfrac{1}{5}$.

Thí dụ 5

Tìm m để phương trình có nghiệm : $\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2-x+1}=m$ (1)

Lời giải

Xét các vectơ $\vec{u}=\left(\frac{1}{2}+x\ ;\ -\frac{\sqrt{3}}{2}\right), \vec{v}=\left(\frac{1}{2}-x\ ;\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ ta có $|\vec{u}+\vec{v}|=1$

Hiển nhiên $\forall\ \vec{u},\vec{v}$ luôn có $|\vec{u}|-|\vec{v}|\le|\vec{u}+\vec{v}|$, dấu đẳng thức có khi và chỉ khi $\vec{v}=\vec{0}$ hoặc $\vec{u},\vec{v}$ ngược hướng.

Khả năng $\vec{v}=\vec{0}$ không thể xảy ra do $y_{\vec{v}}=\frac{\sqrt{3}}{2}\neq 0$.

Khả năng $\vec{u},\vec{v}$ ngược hướng $\Leftrightarrow \dfrac{\frac{1}{2}+x}{\frac{1}{2}-x}=\dfrac{-\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}<0 \Leftrightarrow 1+2x=-1+2x \Leftrightarrow 2=0$

Điều này mâu thuẫn.

Suy ra : $|\vec{u}+\vec{v}|<1$ hay tập giá trị của $f(x)=\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2-x+1}$ là $(-1;1)$

Bởi vậy phương trình (1) có nghiệm khi và chỉ khi $m\in(-1;1)$

Thí dụ 6

Giải bất phương trình $x+\sqrt{x-1}\ge 3+\sqrt{2x^2-10x+16}$ (1)

Lời giải

Tập xác định $\forall x\ge 1$

Viết lại : (1) $\Leftrightarrow (x-3)+\sqrt{x-1}\ge\sqrt{2}\sqrt{(x-3)^2+(x-1)}$ (2)

Xét các vectơ $\vec{u}=\left(x-3;\sqrt{x-1}\right)$, $\vec{v}=(1;1)$

Sẽ có $\vec{u}.\vec{v}=(x-3)+\sqrt{x-1}$, $|\vec{u}||\vec{v}|=\sqrt{2}\sqrt{(x-3)^2+(x-1)}$

Suy ra BPT (2) có dạng $\vec{u}.\vec{v}\ge|\vec{u}||\vec{v}| \Leftrightarrow \vec{u}.\vec{v}=|\vec{u}||\vec{v}| \Leftrightarrow \vec{u},\vec{v}$ cùng hướng

$\Leftrightarrow \dfrac{x-3}{1}=\dfrac{\sqrt{x-1}}{1}>0 \Leftrightarrow \begin{cases}(x-3)^2=x-1\\ x>3\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x^2-7x+10=0\\ x>3\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\left[\begin{array}{l}x=2\\ x=5\end{array}\right.\\ x>3\end{cases}$

$\Leftrightarrow x=5$. Vậy x=5 là nghiệm duy nhất phương trình đã cho.

Chú ý.

Hai quy trình trên hoàn toàn có thể áp dụng cho giải hệ phương trình vô tỉ.

BÀI TẬP

Giải các phương trình và bất phương trình sau :

1) $\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-2x+5}=\sqrt{10}$

2) $\sqrt{4x^2-28x+53}+\sqrt{4x^2-12x+13}=4\sqrt{2}$

3) $\sqrt{x^2-x+1}+\sqrt{x^2-\sqrt{3}x+1}=\sqrt{2}$

4) $\sqrt{3-2x-x^2}+\sqrt{24-23x-x^2}=10$

5) $\sqrt{10-3x-x^2}+\sqrt{18-7x-x^2}<\sqrt{77}$

6) $\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{x^2-x+1}<2$

7) $\left|\sqrt{x^2-4x+5}-\sqrt{x^2-10x+50}\right|\geq 5$

8) $x\sqrt{x+1}+\sqrt{3-x}\geq 2\sqrt{x^2+1}$

9) $\sqrt{x^2+2x}+\sqrt{2x-1}\geq\sqrt{3x^2+4x+1}$

§8. NHỮNG PHƯƠNG TRÌNH, BẤT PHƯƠNG TRÌNH KHÁC

- *Phương trình chứa nhiều lớp căn.*
- *Bất phương trình* $f(x)\leq\sqrt{p-qx-x^2}$, $f(x)\geq\sqrt{p-qx-x^2}$
- *Phương trình giải bằng phương pháp đánh giá.*
- *Những phương trình khác.*

I. Phương trình chứa nhiều lớp căn

Khi gặp phương trình chứa nhiều lớp căn, ta có thể đặt căn thức trong cùng làm ẩn phụ

Thí dụ 1

Cho phương trình $x+\sqrt{x+\frac{1}{2}+\sqrt{x+\frac{1}{4}}}=m$ (1)

a) Giải phương trình khi m = 9.

b) Biện luận theo m số nghiệm của phương trình.

Lời giải

Tập xác định : $x\geq-\frac{1}{4}$ (2)

Đặt $\sqrt{x+\frac{1}{4}}=t\geq 0\Rightarrow x=t^2-\frac{1}{4}$ (3)

Phương trình (1) trở thành $t^2 - \frac{1}{4} + \sqrt{t^2 - \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + t} = m$

$\Leftrightarrow t^2 - \frac{1}{4} + \sqrt{t^2 + t + \frac{1}{4}} = m \Leftrightarrow t^2 - \frac{1}{4} + \sqrt{\left(t + \frac{1}{2}\right)^2} = m \Leftrightarrow t^2 - \frac{1}{4} + t + \frac{1}{2} = m$

$\Leftrightarrow t^2 + t + \frac{1}{4} = m \Leftrightarrow \left(t + \frac{1}{2}\right)^2 = m$ (4)

a) Khi m = 9, phương trình (4) trở thành $\left(t + \frac{1}{2}\right)^2 = 9$ (5)

Do $t \geq 0$ nên (5) $\Leftrightarrow t + \frac{1}{2} = 3 \Leftrightarrow t = \frac{5}{2}$. Thay vào (3) có $x = 6$. (thích hợp)

Vậy khi m = 9 phương trình có một nghiệm duy nhất là x = 6.

b) Do $t \geq 0 \Rightarrow \left(t + \frac{1}{2}\right)^2 \geq \frac{1}{4}$ nên từ phương trình (4) suy ra :

- $m < \frac{1}{4}$: (4) vô nghiệm $\Rightarrow$ Phương trình (1) vô nghiệm.
- $m = \frac{1}{4}$: (4) $\Leftrightarrow t = 0$. Thay vào (3) có $x = \frac{1}{4}$.
- $m > \frac{1}{4}$: (4) $\Leftrightarrow t + \frac{1}{2} = \sqrt{m} \Leftrightarrow t = \sqrt{m} - \frac{1}{2}$.

Thay vào (3) có $x = \left(\sqrt{m} - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} \Leftrightarrow x = m - \sqrt{m}$

Chú ý. *Một cách trình bày khác* : Gọi $A = x + \sqrt{\left(x + \frac{1}{4}\right) + \sqrt{x + \frac{1}{4}} + \frac{1}{4}}$.

Để ý $\sqrt{\left(x + \frac{1}{4}\right) + \sqrt{x + \frac{1}{4}} + \frac{1}{4}} = \sqrt{\left(\sqrt{x + \frac{1}{4}} + \frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{x + \frac{1}{4}} + \frac{1}{2}$

$A = x + \sqrt{x + \frac{1}{4}} + \frac{1}{2} = \left(x + \frac{1}{4}\right) + \sqrt{x + \frac{1}{4}} + \frac{1}{4} = \left(\sqrt{x + \frac{1}{4}} + \frac{1}{2}\right)^2$

Do vậy (1) $\Leftrightarrow A = m \Leftrightarrow \left(\sqrt{x + \frac{1}{4}} + \frac{1}{2}\right)^2 = m$

+ Khi m = 9, ta có (3) $\Leftrightarrow \left(\sqrt{x + \frac{1}{4}} + \frac{1}{2}\right)^2 = 9$

$$\Leftrightarrow\left(\sqrt{x+\frac{1}{4}}+\frac{1}{2}+3\right)\left(\sqrt{x+\frac{1}{4}}+\frac{1}{2}-3\right)=0 \Leftrightarrow \left(\sqrt{x+\frac{1}{4}}-\frac{5}{2}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x+\frac{1}{4}}=\frac{5}{2} \Leftrightarrow x=6$$

• Đó là kỹ thuật tách bình phương đủ để đưa biểu thức dưới căn thoát khỏi căn thức. Kỹ thuật này phụ thuộc sự nhạy bén và kĩ năng tách bình phương đủ.

• Trong khi đó kỹ thuật đặt ẩn phụ không đòi hỏi một sự khéo léo nào.

Thí dụ 2

Giải và biện luận theo a số nghiệm của phương trình

$$\sqrt{x+\sqrt{2ax-a^2}}+\sqrt{x-\sqrt{2ax-a^2}}=\sqrt{2a} \qquad (1)$$

Lời giải

* $a<0$, $\sqrt{2a}$ vô nghĩa, phương trình không tồn tại. (2)

* $a=0$, (1) $\Leftrightarrow 2\sqrt{x}=0 \Leftrightarrow x=0$ (3)

* $a>0$, Nhân hai vế với $\sqrt{2a}>0$, ta có

$$(1)\Leftrightarrow \sqrt{2ax+2a\sqrt{2ax-a^2}}+\sqrt{2ax-2a\sqrt{2ax-a^2}}=2a \qquad (4)$$

Đặt $\sqrt{2ax-a^2}=t\geq 0 \Rightarrow 2ax=t^2+a^2$ (5), phương trình (4) trở thành

$$\sqrt{t^2+a^2+2at}+\sqrt{t^2+a^2-2at}=2a \Leftrightarrow \sqrt{(t+a)^2}+\sqrt{(t-a)^2}=2a$$

$$\Leftrightarrow t+a+|t-a|=2a \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}t>a\\ t+a+t-a=2a\end{cases}\\ \begin{cases}t\leq a\\ t+a-t+a=2a\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\text{vô nghiệm}\\ 0\leq t\leq a\end{array}\right.$$

Với $0\leq t\leq a \Rightarrow 0\leq t^2\leq a^2$, thay vào (5) có $0\leq 2ax-a^2\leq a^2 \Leftrightarrow \frac{a}{2}\leq x\leq a$ (6)

Từ (2), (3), (6) kết luận

+ $a<0$: phương trình vô nghiệm.

+ $a\geq 0$: phương trình có nghiệm với $\forall x\in\left[\frac{a}{2};a\right]$∂

II. Các bất phương trình

$$f(x)\leq\sqrt{p-qx-x^2},\ f(x)\geq\sqrt{p-qx-x^2}$$

(Trong đó f(x) là hàm đa thức)

Thí dụ 1

Cho bất phương trình $\sqrt{-x^2+6x-5} \ge m-2x$ (1)

a) Giải bất phương trình khi $m = 8$.

b) Tìm m để bất phương trình (1) nghiệm đúng với $\forall x \in [1; 5]$.

Lời giải

a) *Cách 1* : Khi m=8, bất phương trình trở thành $\sqrt{-x^2+6x-5} \ge 8-2x$ (2)

$$(2) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}8-2x<0\\ -x^2+6x-5\ge 0\end{cases}\\ \begin{cases}8-2x\ge 0\\ -x^2+6x-5\ge (8-2x)^2\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x>4\\ 1\le x\le 5\end{cases}\\ \begin{cases}x\le 4\\ 5x^2-38x+69\le 0\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}4<x\le 5\\ \begin{cases}x\le 4\\ 3\le x\le \dfrac{23}{5}\end{cases}\end{array}\right.,$$

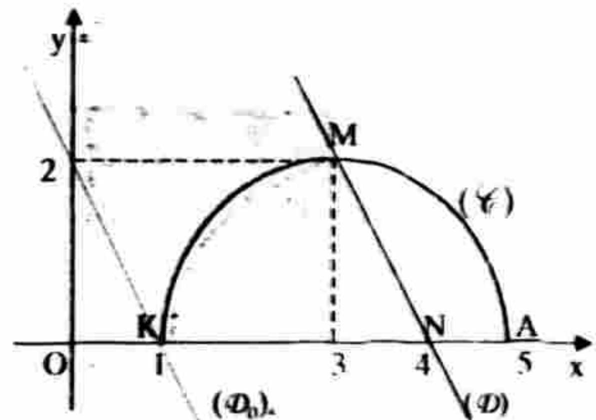
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}4<x\le 5\\ 3\le x\le 4\end{array}\right. \Leftrightarrow 3\le x\le 5$$

Cách 2. Vẽ các đồ thị $(\mathscr{C})$, $(\mathscr{D})$ lên trên một hệ trục toạ độ. Trong đó:

+ $(\mathscr{C})$ là đồ thị $y=\sqrt{-x^2+6x-5}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}(x-3)^2+y^2=4\\ y\ge 0\end{cases}$. Đó là nửa đường tròn tâm I(3; 0), bán kính R = 2

+ $(\mathscr{D})$ là đường thẳng y=8-2x. Rõ ràng $(\mathscr{D})$ chứa các điểm M(3; 2), N(4; 0).



Hình 16

• Nghiệm của bất phương trình $f(x) \ge h(x)$ là tập hợp các giá trị của x *ứng với cung AM* - phần đồ thị $(\mathscr{C})$ ở không dưới đồ thị $(\mathscr{D})$. Căn cứ vào đồ thị suy ra bất phương trình có tập nghiệm là $3 \le x \le 5$. (h.16).

b) *Cách 1*: Phương trình đường thẳng $(\mathscr{D}_0)$ // $(\mathscr{D})$ và chứa điểm K(1; 0) là

$$y=-2(x-1) \Leftrightarrow y=2-2x.$$

Bất phương trình (1) nghiệm $\forall x \in [1; 5] \Leftrightarrow (\mathscr{C})$ không nằm dưới $(\mathscr{D})$.

Điều đó có khi và chỉ khi $(\mathscr{D})$ không ở trên $(\mathscr{D}_0) \Leftrightarrow m \le 2$

Cách 2 : Gọi $f(x)=\sqrt{-x^2+6x-5}$, ta có $\min\limits_{[1;5]} f(x)=f(1)=f(5)=0$

Gọi $h(x)=8-2x$, ta có $\max\limits_{[1;5]} h(x)=h(1)=m-2$

+ Bất phương trình (1) nghiệm $\forall x \in K=[1;5] \Leftrightarrow \min\limits_{[1;5]} f(x) \ge \max\limits_{[1;5]} h(x)$

$\Leftrightarrow 0 \ge m-2 \Leftrightarrow m \le 2$

Thí dụ 2:

Cho bất phương trình $\sqrt{8+2x-x^2} \leq \frac{3x+m}{2}$ (1)

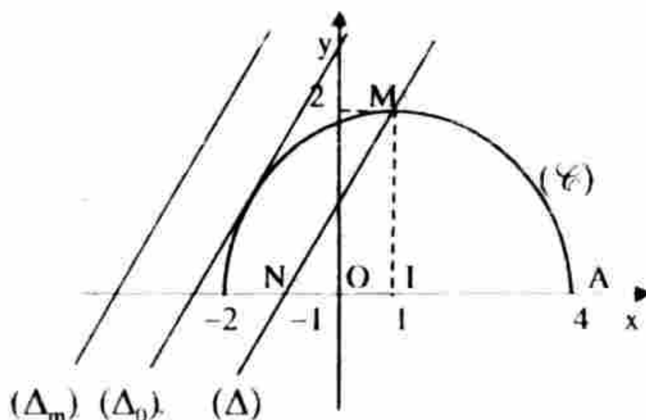
a) Giải bất phương trình khi m = 3.

b) Tìm m để (1) nghiệm $\forall x \in K = [-2; 4]$.

Lời giải

a) Khi m = 3, bất phương trình trở thành $\sqrt{8+2x-x^2} \leq \frac{3x+3}{2}$ (2)

Cách 1 (Đồ thị)



Hình 17

• Vẽ các đồ thị (𝒞) và (Δ) lên cùng một hệ trục toạ độ trong đó (𝒞) là đồ thị $y = \sqrt{8+2x-x^2}$ $\Leftrightarrow \{(x-1)^2 + y^2 = 9; y \geq 0\}$. Đó là nửa đường tròn tâm I(1; 0), bán kính R = 3. (Δ) là đồ thị $y = \frac{3x+3}{2}$.

Đó là đường thẳng đi qua các điểm M(1; 3), N(–1; 0)

• Nghiệm của bất phương trình (2) là hoành độ tập hợp các điểm mà đồ thị của (𝒞) không trên đồ thị (Δ)

• Căn cứ vào đồ thị suy ra bất phương trình (2) có tập nghiệm là : $1 \leq x \leq 4$ [Ứng với cung tròn AM, trong đó A= (4; 0)]. (h. 17)

Cách 2.

$$(2) \Leftrightarrow \begin{cases} 3x+3 \geq 0 \\ 8+2x-x^2 \geq 0 \\ 8+2x-x^2 \leq \left(\frac{3x+3}{2}\right)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ -2 \leq x \leq 4 \\ 13x^2+10x-23 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 \leq x \leq 4 \\ \left[\begin{array}{l} x \leq -\frac{23}{13} \\ x \geq 1 \end{array}\right. \end{cases}$$

$\Leftrightarrow 1 \leq x \leq 4$

b) Gọi (Δ_m) là đường thẳng : $y = \frac{3x+m}{2} \Leftrightarrow 3x - 2y + m = 0$

• Khoảng cách từ I đến (Δ_m) là $d = \frac{|3.1 - 2.0 + m|}{\sqrt{3^2+(-2)^2}} = \frac{|m+3|}{\sqrt{13}}$

• (Δ_m) tiếp xúc với (𝒞) $\Leftrightarrow \begin{cases} d = R \\ (\Delta_m) \text{ ở trên } (\Delta) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{|m+3|}{\sqrt{13}} = 3 \\ m > 3 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} m = -3 \pm 3\sqrt{13} \\ m > 3 \end{cases} \Leftrightarrow$ **$m = -3 + 3\sqrt{13}$**

- Gọi (Δ_0) là tiếp **tuyến của (ℓ) ứng với** $m = -3 + 3\sqrt{13}$
- Bất phương trình **(1) nghiệm** $\forall x \in K = [-2; 4] \Leftrightarrow (\Delta_m)$ **không ở dưới** (Δ_0)

$\Leftrightarrow m \geq -3 + 3\sqrt{13}$

Thí dụ 3.

Cho bất phương trình **$4\sqrt{(4 - x)(2 + x)} \geq 18 - a + 2x - x^2$** (1)

a) Giải bất phương **trình khi a = 6.**

b) Tìm a để bất **phương trình nghiệm** $\forall x \in [-2; 4]$

Lời giải

a) Tập xác định : R

Viết lại (1) $\Leftrightarrow$ $4\sqrt{-x^2 + 2x + 8} \geq 18 - a + 2x - x^2$

Để ý $\frac{-1}{1} = \frac{2}{-2}$ nên **đặt** $t = \sqrt{-x^2 + 2x + 8} = \sqrt{9 - (x - 1)^2} \Rightarrow 0 \leq t \leq 3$ (2)

Bất phương trình (1) **trở thành** $t^2 - 4t + 10 \leq a$ (3)

a) Khi a = 6, bất **phương trình trở thành** $t^2 - 4t + 4 \leq 0 \Leftrightarrow t = 2$ **(thích hợp)**

Vậy bất phương trình **(1) có nghiệm thoả** $\sqrt{9 - (x - 1)^2} = 2 \Leftrightarrow (x - 1)^2 = 5$

$\Leftrightarrow x = 1 \pm \sqrt{5}$.

b) *Cách 1:* Gọi $f(t) = t^2 - 4t + 10$. $\underset{[0; 3]}{\text{Max}}\, f(t) = \max\{f(0); f(3)\} = 10$

Bất phương trình **(1) nghiệm** $\forall x \in [-2; 4]$ $\Leftrightarrow$ **Bất phương trình** (3) **nghiệm** $\forall t \in [0; 3] \Leftrightarrow a \geq \underset{[0; 3]}{\max} f(t) \Leftrightarrow a \geq 10$

Cách 2: Bất **phương trình (1) nghiệm** $\forall x \in [-2; 4] \Leftrightarrow$ **Bất phương trình** $h(t) = t^2 - 4t + 10 - a \leq 0$ **nghiệm** $\forall t \in [0; 3] \Leftrightarrow$ **Phương trình** $h(x) = 0$ có hai nghiệm phân biệt thoả $t_1 \leq 0 < 3 \leq t_2 \Leftrightarrow \begin{cases} h(0) \leq 0 \\ h(3) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 10 - a \leq 0 \\ 7 - a \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow a \geq 10$

Chú ý

*Bạn cũng có thể giải **bằng phương pháp đồ thị** như các thí dụ 1 và 2 ở trên.*

III Phương trình giải bằng đánh giá

- **Đánh giá bằng tập xác định**
- **Đánh giá bằng bất đẳng thức**
- **Đánh giá bằng miền giá trị** (*phương pháp hàm số*)

*(Đánh giá **bằng phương pháp** vectơ đã trình bày riêng trong §6)*

Thí dụ 1

Giải phương trình : $\sqrt{x(x-1)} + \sqrt{x(x+2)} = 2\sqrt{x^2}$ (1)

Lời giải

Tập xác định: $D = (-\infty; -2] \cup \{0\} \cup [1; +\infty)$

Thấy rằng x=0 là một nghiệm của phương trình. (2)

+ Với $x \geq 1$, chia hai vế cho $\sqrt{x} > 1$ có : (1) $\Leftrightarrow \sqrt{x-1} + \sqrt{x+2} = 2\sqrt{x}$ (3)

Bình phương hai vế có (3) $\Leftrightarrow 2\sqrt{(x-1)(x+2)} = 2x - 1$

$\Leftrightarrow 4(x^2 + x - 2) = 4x^2 - 4x + 1 \Leftrightarrow 8x = 9 \Leftrightarrow x = \dfrac{9}{8}$ (thích hợp) (4)

+ Với $x \leq -2$, đặt $x = -t$, $t \geq 2$.

Phương trình (1) trở thành $\sqrt{t(t+1)} + \sqrt{t(2-t)} = 2\sqrt{t^2}$ (5)

Chia hai vế cho $\sqrt{t} > 0$ có (5) $\Leftrightarrow \sqrt{t+1} + \sqrt{2-t} = 2\sqrt{t}$ (6)

Bình phương hai vế có : (6) $\Leftrightarrow 3 + 2\sqrt{(t+1)(2-t)} = 4t$. (7)

Áp dụng Cauchy vào vết phải của (7) suy ra : $4t \leq 3 + (t+1) + (2-t)$

$\Leftrightarrow 4t \leq 7 \Leftrightarrow t \leq \dfrac{7}{2}$. Trái với $t \geq 2$, suy ra phương trình (5) vô nghiệm. (8)

Từ (2), (4), (8) kết luận : Phương trình có tập nghiệm là $\{ x = 0; x = \dfrac{9}{8} \}$

Thí dụ 2

Giải phương trình $\sqrt{x-4} + \sqrt{6-x} = x^2 - 10x + 27$ (1)

Lời giải

Điều kiện : $4 \leq x \leq 6$ (2)

Theo bất đẳng thức Bu-nhi-a-cop-ski ta có

$$\sqrt{x-4} + \sqrt{6-x} \leq \sqrt{(1+1)(x-4+6-x)} = 2.$$

Dấu đẳng thức có khi và chỉ khi $\dfrac{x-4}{1} = \dfrac{6-x}{2} > 0 \Leftrightarrow x = 5$. (3)

Do vậy từ (1) $\Rightarrow x^2 - 10x + 27 \leq 2 \Leftrightarrow x^2 - 10x + 25 \leq 0$

$\Leftrightarrow (x-5)^2 \leq 0 \Leftrightarrow x = 5$ (4)

Tì (3), (4) suy ra x=5 là nghiệm duy nhất của phương trình đã cho.

Thí dụ 3

Giải phương trình $\sqrt{x + x^2 - 1} + \sqrt{x - x^2 + 1} = x^2 - x + 2$ (*)

Lời giải

Tập xác định: $D = \left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}; \dfrac{\sqrt{5}-1}{2} \right)$ (1)

Theo bất đẳng thức Cô–si :

$$\sqrt{x + x^2 - 1} \le \frac{1}{2}(1+x+x^2-1) = \frac{1}{2}(x+x^2) \qquad (2)$$

$$\sqrt{x - x^2 + 1} \le \frac{1}{2}(1+x-x^2+1) = \frac{1}{2}(x-x^2+2) \qquad (3)$$

Cộng vế theo vế các bất đẳng thức (2), (3) có

$$\sqrt{x + x^2 - 1} + \sqrt{x - x^2 + 1} \le x+1 \qquad (4)$$

Dấu đẳng thức có khi $\begin{cases} 1 = x + x^2 - 1 \\ 1 = x - x^2 + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \{x = 1;\ x = -2\} \\ \{x = 1;\ x = 0\} \end{cases} \Leftrightarrow x = 1 \qquad (5)$

Từ (*) và (4) suy ra $x^2-x+2 \le x+1 \Leftrightarrow (x-1)^2 \le 0 \Leftrightarrow x=1 \qquad (6)$

Từ (1), (5) và (6) suy ra x=1 là nghiệm duy nhất của phương trình (*)

Thí dụ 4 (trở lại Thí dụ 5§I chương V)

Giải phương trình $3x^2 - 5x + 6 = 2x\sqrt{x^2 + x - 3} \qquad (1)$

Lời giải

Để ý $3x^2 - 5x + 6 > 0$ với mọi x (do $a = 3 > 0$, $\Delta = -47 < 0$) suy ra điều kiện của phương trình là $\begin{cases} x > 0 \\ x^2 + x - 3 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x > \frac{\sqrt{13} - 1}{2} \qquad (2)$

Theo bất đẳng thức Cô–si : $2x\sqrt{x^2 + x - 3} \le x^2 + (x^2 + x - 3) = 2x^2 + x - 3$.

Dấu đẳng thức có khi và chỉ khi $x^2 = x^2 + x - 3 \Leftrightarrow x=3$ (thoả mãn (2)) $\qquad (3)$

Do vậy từ (1) $\Rightarrow 3x^2 - 5x + 6 \le 2x^2 + x - 3$

$\Leftrightarrow x^2 - 6x + 9 \le 0 \Leftrightarrow (x - 3)^2 \le 0 \Leftrightarrow x = 3 \qquad (4)$

Từ (3), (4) suy ra x=3 là nghiệm duy nhất của phương trình đã cho.

Thí dụ 5

Giải phương trình $x^4+1998x^3+998001x^2+x-\sqrt{2x + 1999}+1000=0 \qquad (1)$

Lời giải

Điều kiện $x \ge -\frac{1999}{2} \qquad (2)$

Ta có: (1) $\Leftrightarrow x^2(x^2 + 1998x + 998001) + x - \sqrt{2x + 1999} + 1000 = 0$

$$\Leftrightarrow x^2(x^2 + 2x999 + 998001) + \frac{1}{2}(2x + 1999 - 2\sqrt{2x + 1999} + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2(x + 999)^2 + \frac{1}{2}(\sqrt{2x + 1999} - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x(x + 999) = 0 \\ \sqrt{2x + 1999} - 1 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x(x + 999) = 0 \\ 2x + 1999 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = -999 \text{(Thích hợp điều kiện (2))}$$

Vậy phương trình có 1 nghiệm duy nhất là x = –999.

Thí dụ 6

Giải phương trình $x^4+4x^3+6x^2+4x+\sqrt{x^2+2x+10}=2$ (1)

Lời giải

Tập xác định : R

Viết lại : (1) $\Leftrightarrow$ $x^4+4x^3+6x^2+4x+1+\sqrt{x^2+2x+10}=3$

$\Leftrightarrow$ $(x+1)^4+\sqrt{(x+1)^2+9}=3$ (2)

Dễ thấy $(x+1)^4+\sqrt{(x+1)^2+9}\geq 3$ Dấu đẳng thức có khi $x+1=0$

Bởi vậy : (2) $\Leftrightarrow$ $x+1=0$ $\Leftrightarrow$ $x=-1$. Đó là nghiệm duy nhất của phương trình đã cho.

Thí dụ 7

Giải phương trình $\sqrt{x-1}+\sqrt{3-x}+x^2+2x-3-\sqrt{2}=0$ (1)

Lời giải

Điều kiện : $1\leq x\leq 3$ (2)

• Ta có $\left(\sqrt{x-1}+\sqrt{3-x}\right)^2=2+2\sqrt{(x-1)(3-x)}\geq 2\Rightarrow\sqrt{x-1}+\sqrt{3-x}\geq\sqrt{2}$.

Dấu đẳng thức có khi $\left[\begin{array}{l}x=1\\x=3\end{array}\right.$ (3)

Suy ra : $\sqrt{2}+x^2+2x-3-\sqrt{2}\leq 0\Leftrightarrow x^2+2x-3\leq 0\Leftrightarrow -3\leq x\leq 1$ (4)

Từ (2), (3) và (4) suy ra x=1. Thay x=1 vào (1) thấy đúng.

Vậy x = 1 là nghiệm duy nhất của phương trình đã cho.

Thí dụ 8

Giải phương trình $\sqrt{3x^2+6x+7}+\sqrt{5x^2+10x+14}=4-2x-x^2$ (1)

Lời giải

Tập xác định : R

Viết lại (1) $\Leftrightarrow$ $\sqrt{3(x+1)^2+4}+\sqrt{5(x+1)^2+9}=4-2x-x^2$ (2)

$VT(2)=\sqrt{3(x+1)^2+4}+\sqrt{5(x+1)^2+9}\geq 2+3=5$ (3)

Dấu đẳng thức xảy ra khi $x=-1$ (4)

Suy ra : $4-2x-x^2\geq 5\Leftrightarrow(x+1)^2\leq 0\Leftrightarrow x=-1$

Do vậy $x=-1$ là nghiệm duy nhất của phương trình đã cho.

Thí dụ 9

Giải phương trình $2x^3-x^2+\sqrt[3]{2x^3-3x+1}=3x+1+\sqrt[3]{x^2+2}$ (1)

Lời giải

Tập xác định : R

Cách 1 : Viết lại (1) $\Leftrightarrow$ $2x^3-3x+1+\sqrt[3]{2x^3-3x+1}=x^2+2+\sqrt[3]{x^2+2}$ (2)

Đặt $a = \sqrt[3]{2x^3 - 3x + 1}$, $b = \sqrt[3]{x^2 + 2}$, phương trình (2) trở thành $a^3 + a = b^3 + b$

$\Leftrightarrow (a^3 - b^3) + (a - b) = 0 \Leftrightarrow (a - b)(a^2 + ab + b^2 + 1) = 0$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2}(a - b)[(a + b)^2 + a^2 + b^2 + 2] = 0$

$\Leftrightarrow a = b \Leftrightarrow a^3 = b^3 \Leftrightarrow 2x^3 - 3x + 1 = x^2 + 2 \Leftrightarrow 2x^3 - x^2 - 3x - 1 = 0$

$\Leftrightarrow (2x+1)(x^2-x-1)=0$

$\Leftrightarrow \left\{x = -\frac{1}{2};\ x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}\right\}$. Đó là tập nghiệm của phương trình đã cho

Cách 2 (Tiếp nối từ (2)

Xét hàm số $f(t) = t + \sqrt[3]{t}$; Tập xác định R

Phương trình (2) được viết : $f(2x^3-3x+1) = f(x^2+2)$ (3)

Để ý: Với $\forall t_1, t_2 \in R, t_1 \neq t_2$ có $\begin{cases} f(t_2) = t_2 + \sqrt[3]{t_2} \\ f(t_1) = t_1 + \sqrt[3]{t_1} \end{cases}$

$\Rightarrow f(t_2) - f(t_1) = t_2 - t_1 + \sqrt[3]{t_2} - \sqrt[3]{t_1} = \left(\sqrt[3]{t_2} - \sqrt[3]{t_1}\right)\left(\sqrt[3]{t_2^2} + \sqrt[3]{t_1 t_2} + \sqrt[3]{t_1^2} + 1\right)$

$\rightarrow \frac{f(t_2) - f(t_1)}{t_2 - t_1} = (\sqrt[3]{t_2^2} + \sqrt[3]{t_1 t_2} + \sqrt[3]{t_1^2} + 1) > 1$

$\Rightarrow$ f(t) đồng biến trên R

Bởi vậy : (3) $\Leftrightarrow 2x^3 - 3x + 1 = x^2 + 2 \Leftrightarrow 2x^3 - x^2 - 3x - 1 = 0 \Leftrightarrow (2x+1)(x^2 - x - 1) = 0$.

$\Leftrightarrow \left\{x = -\frac{1}{2};\ x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}\right\}$. Đó là tập nghiệm của phương trình đã cho

Chú ý. *Trong lời giải trên đã sử dụng kiến thức :*

Nếu $f(t)$ là hàm đơn điệu thì $f(t_1)=f(t_2) \Leftrightarrow t_1=t_2$

Chú ý 3. *Bài toán trình bày được bằng phương pháp đánh giá bằng bất đẳng thức $|\vec{u}||\vec{v}| \geq \vec{u}.\vec{v}$ thì cũng trình bày được theo phương pháp đánh giá bằng bất đẳng thức Bunhiakopski và ngược lại*. Chẳng hạn

Thí dụ 10

Giải phương trình $\sqrt{9x^3 - 18x^2} + \sqrt{36x^2 - 9x^3} = 9 + x^2$ (1)

(Xem lời giải bằng phương pháp vectơ đã trình bày trong Thí dụ 1 §7 chương V)

Lời giải

Tập xác định : D = [2; 4] (2)

$$9+x^2 = \sqrt{1.(9x^3 - 18x^2)} + \sqrt{1.(36x^2 - 9x^3)}$$

$$\leq \sqrt{(1+1)(9x^3 - 18x^2 + 36x^2 - 9x^3)} \overset{x \geq 3}{=} 6x$$

Dấu đẳng thức có khi $\sqrt{9x^3 - 18x^2} = \sqrt{36x^2 - 9x^3} \overset{x>3}{\Leftrightarrow} x=3$ *(Thích hợp (2))* (3)

Do vậy từ (1) $\Rightarrow x^2+9 \le 6x \Leftrightarrow (x-3)^2 \le 0 \Leftrightarrow x = 3$ (4)

Từ (2), (3), (4) $\Rightarrow$ phương trình có một nghiệm duy nhất $x = 3$.

• Cách khác *(Cô-si).*

Để ý $x = 0$ không phải là nghiệm của (1). Chia hai vế cho $3x \neq 0$, ta có

$$(1) \Leftrightarrow \sqrt{1(x-2)} + \sqrt{1(4-x)} = \frac{3}{x} + \frac{x}{3} \quad (5)$$

Theo Cauchy: $\begin{cases} \sqrt{1(x-2)} \le \dfrac{1+x-2}{2} = \dfrac{x-1}{2} \\ \sqrt{1(4-x)} \le \dfrac{1+4-x}{2} = \dfrac{5-x}{2} \end{cases}$ Cộng vế theo vế có $VT(5) \le 2$.

Dấu đẳng thức có khi $\begin{cases} 1 = x-2 \\ 1 = 4-x \end{cases} \Leftrightarrow x = 3.$ (6)

Kết hợp với (5) có : $\dfrac{3}{x} + \dfrac{x}{3} \le 2 \overset{x>2}{\Leftrightarrow} (x-3)^2 \le 0 \Leftrightarrow x = 3.$ (7)

Từ (5), (6), (7) kết luận $x=3$ là nghiệm duy nhất của phương trình đã cho.

Chú ý 4. *Nếu lời giải trình bày được theo phương pháp đánh giá bằng bất đẳng thức* $|\vec{u}| + |\vec{v}| \ge |\vec{u} + \vec{v}|$ *thì cũng trình bày được bằng phương pháp toạ độ và ngược lại.* Chẳng hạn

Thí dụ 11

Giải phương trình $\sqrt{x^2-2x+5} + \sqrt{x^2+2x+10} = \sqrt{29}$ (1)

(Xem lời giải bằng phương pháp vectơ đã trình bày trong Thí dụ 4 §7 chương V)

Lời giải

Tập xác định : R

Viết lại $(1) \Leftrightarrow \sqrt{(x-1)^2+2^2} + \sqrt{(x-1)^2+3^2} = \sqrt{29}$

Trong mp toạ độ xét các điểm $M=(x; 0)$, $A=(1; 2)$, $B=(-1; -3)$. Sẽ có

Phương trình đường thẳng AB là $\dfrac{x-x_A}{x_B-x_A} = \dfrac{y-y_A}{y_B-y_A}$

$$\Leftrightarrow \frac{x-1}{-2} = \frac{y-2}{-5} \Leftrightarrow 5x-2y-1=0$$

$MA=\sqrt{x^2-2x+5}$, $MB=\sqrt{x^2+2x+10}$, $AB=\sqrt{29}$. Do vậy

$(1) \Leftrightarrow MA+MB=AB \Leftrightarrow M$ thuộc đoạn thẳng AB $\Rightarrow M=AB \cap Ox$

$\Rightarrow$ Toạ độ M là nghiệm của hệ $\begin{cases} y = 0 \\ 5x-2y-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x = \dfrac{1}{5} \end{cases} \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{5}$

Đó là nghiệm duy nhất của phương trình đã cho.

IV. Những phương trình khác

Thí dụ 1

Tìm a để phương trình có nghiệm : $x+y+\sqrt{2x(y-1)+a}=2$ **(1)**

Lời giải

Viết lại (1) $\Leftrightarrow 2-x-y=\sqrt{2x(y-1)+a} \Leftrightarrow \begin{cases}(2-x-y)^2=2x(y-1)+a\\ 2-x-y\geq 0\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}(x+y)^2-4(x+y)+4=2xy-2x+a\\ x+y-2\leq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(x-1)^2+(y-2)^2=a+1 & (2)\\ x+y-2\leq 0 & (3)\end{cases}$

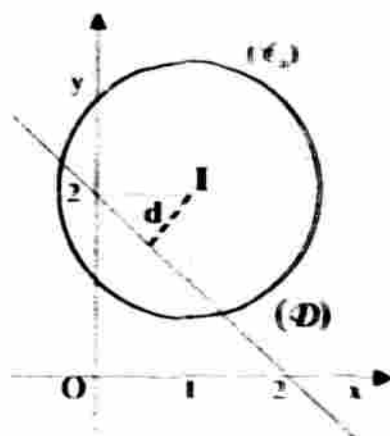
Với $a<-1$: Phương trình (2) vô nghiệm nên phương trình (1) vô nghiệm. (4)

Với $a=-1$, ta có (2) $\Leftrightarrow (x-1)^2+(y-2)^2=0$

$\Leftrightarrow \begin{cases}x=-1\\ y=2\end{cases}$ không thoả mãn bất phương trình (3).

Vậy $a=-1$ không phải là giá trị phải tìm. (5)

Với $a>-1$, ta có (2) là phương trình đường tròn $(\mathscr{C}_a)$: $(x-1)^2+(y-2)^2=a+1$ có tâm $I=(1;2)$, bán kính $R=\sqrt{a+1}$.



Hình 18

Gọi $(\mathscr{D})$ đường thẳng có phương trình $x+y-2=0$.

Khoảng cách từ điểm I đến đường thẳng $(\mathscr{D})$ là $d=\dfrac{|1+2-2|}{\sqrt{1+1}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

Thấy rằng (0; 0) là một nghiệm của bất phương trình (3). Nghiệm của (3) là độ các điểm thuộc nửa mặt phẳng chứa điểm O (kể cả bờ) giới hạn bởi đường nghiệm của hệ (2), (3) là toạ độ các điểm tương ứng với phần của $(\mathscr{C}_a)$ không nằm trên $(\mathscr{D})$.

Từ đó suy ra hệ (2), (3) có nghiệm $\Leftrightarrow R\geq d \Leftrightarrow \sqrt{a+1}\geq \dfrac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow a\geq -\dfrac{1}{2}$ **(6)**

Từ (4), (5), (6) kết luận : phương trình đã cho có nghiệm $\Leftrightarrow a\geq -\dfrac{1}{2}$

Thí dụ 2

Tìm nghiệm nguyên của phương trình $y=x+\sqrt{y^2+2(x+1)y+4x}$ **(1)**

Lời giải

Điều kiện : $y\geq x$ **(2)**

Viết lại (1) $\Leftrightarrow y-x=\sqrt{y^2+2(x+1)y+4x}$

$\Rightarrow (x-y)^2=y^2+2(x+1)y+4x \Leftrightarrow x^2-4x=y(4x+2)$ **(3)**

Điều kiện cần :

• Thấy rằng $4x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$ không nghiệm phương trình (3)

$$\Rightarrow y = \frac{x^2 - 4x}{4x + 2} \Leftrightarrow y = \frac{x}{4} - \frac{9}{8} + \frac{9}{8(2x+1)} \Leftrightarrow 8y = 2x - 9 + \frac{9}{2x+1} \qquad (4)$$

• x nguyên, y nguyên suy ra $9 \vdots (2x + 1) \Rightarrow (2x + 1) \in \{\pm 1; \pm 3; \pm 9\}$.

Điều kiện đủ

Ta có bảng sau

2x+1	-1	1	-3	3	-9	9
x	-1	0	-2	1	-5	4
y	$-\frac{5}{2}$	0	-2	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{5}{2}$	0

Từ kết quả của bảng, kết hợp với (2) suy ra : Tập nghiệm nguyên của phương trình là $\{x = y = 0; x = y = -2\}$

Thí dụ 3

Giải phương trình $x\sqrt{y-1} + y\sqrt{x-1} = xy$ (1)

Lời giải

Điều kiện $x \ge 1, y \ge 1$. (2)

Theo bất đẳng thức Cô - si $\sqrt{1(y-1)} \le \frac{y}{2} \Leftrightarrow x\sqrt{1(y-1)} \le \frac{xy}{2}$, dấu đẳng thức có khi và chỉ khi $1 = y - 1 \Leftrightarrow y = 2$. (thoả mãn (2)) (3)

Tương tự $y\sqrt{1(x-1)} \le \frac{yx}{2}$, dấu đẳng thức có khi và chỉ khi $x = 2$

(thoả mãn (2)) (4)

Từ (3), (4) suy ra $x\sqrt{y-1} + y\sqrt{x-1} \le \frac{xy}{2} + \frac{xy}{2} = xy$. Do vậy (1) $\Leftrightarrow x = y = 2$.

Đó là cặp nghiệm duy nhất của phương trình đã cho.

Thí dụ 4

Giải phương trình $\sqrt{x} + \sqrt{y-1} + \sqrt{z-2} = \frac{1}{2}(x+y+z)$ (1)

Lời giải

Điều kiện $x \ge 0, y \ge 1, z \ge 2$. (2)

Theo bất đẳng thức Cô - si $\begin{cases} 2\sqrt{1.x} \le 1 + x \\ 2\sqrt{1(y-1)} \le 1 + y - 1 \\ 2\sqrt{1(z-2)} \le 1 + z - 2 \end{cases}$

$\Rightarrow 2(\sqrt{x} + \sqrt{y-1} + \sqrt{z-2}) \le (x + y + z)$

$\Leftrightarrow\ \sqrt{x}+\sqrt{y-1}+\sqrt{z-2}\le\frac{1}{2}(x+y+z)$.

dấu đẳng thức có khi và chỉ khi $\begin{cases}1=x\\1=y-1\\1=z-2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1\\y=2\\z=3\end{cases}$ (thích hợp (2)).

Do vậy (1) $\Leftrightarrow\begin{cases}x=1\\y=2\\z=3\end{cases}$. Đó là cặp nghiệm duy nhất của phương trình đã cho.

BÀI TẬP

Bài 1. Cho bất phương trình $\sqrt{(4+x)(6-x)}\le x^2-2x+m$

1) Giải bất phương trình khi $m=-12$.

2) Tìm m để bất phương trình nghiệm $\forall x\in[-4;6]$.

Bài 2. Giải phương trình $2x^2-8x+3(5-x)\sqrt{\frac{x+1}{x-5}}=12$

Bài 3. Giải và biện luận phương trình $\sqrt{4-x^2}=mx+2$

Bài 4. Giải các phương trình

1) $\sqrt{x+8+2\sqrt{x+7}}+\sqrt{x+1-\sqrt{x+7}}=4$

2) $\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}+\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}=\frac{x+3}{2}$

Bài 5. Giải bất phương trình $x^2+2\sqrt{x^2-3x+11}\le 3x+4$

Chương IV

HỆ PHƯƠNG TRÌNH, HỆ BẤT PHƯƠNG TRÌNH

§1. HỆ PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN

❶ Hệ có nghiệm với giá trị của tham số .

❷ Ứng dụng để tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$Q = |ax + by + c| + |a'x + b'y + c'|;$$
$$Q = (ax + by + c)^2 + (a'x + b'y + c')^2$$

❸ Hệ hai ẩn ba phương trình

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c \end{cases} \quad (a^2+b^2 \neq 0,\ a'^2+b'^2 \neq 0)$$

$D=\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = ab' - a'b$, $D_x=\begin{vmatrix} c & b \\ c' & b' \end{vmatrix} = cb' - c'b$, $D_y=\begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix} = ac' - a'c$,

1) $D \neq 0$: Hệ có một nghiệm duy nhất $(x; y)$ trong đó $x=\dfrac{D_x}{D}$; $y=\dfrac{D_y}{D}$

2) $D= 0$:

- $D_x \neq 0$ hoặc $D_y \neq 0$: Hệ vô nghiệm.
- $D_x = D_y = 0$ Hệ vô số nghiệm, tập nghiệm của hệ là nghiệm của phương trình $ax + by + c = 0$

II. CÁC BÀI TOÁN

Bài toán 1

Giải hệ và biện luận hệ phương trình bậc nhất hai ẩn

Thí dụ 1

Giải và biện luận hệ phương trình $\begin{cases} \dfrac{8}{x} + \dfrac{1}{y} = 17 \\ 7x + 3y = xy \end{cases}$ (1)

Lời giải

Viết lại (1) <=> $\begin{cases} \dfrac{8}{x} + \dfrac{1}{y} = 17 \\ \dfrac{3}{x} + \dfrac{7}{y} = 1 \end{cases}$, đặt $\begin{cases} \dfrac{1}{x} = X \neq 0 \\ \dfrac{1}{y} = Y \neq 0 \end{cases}$, hệ trở thành $\begin{cases} 8X + Y = 17 \\ 3X + 7Y = 1 \end{cases}$

Ta có $D=\begin{vmatrix}8 & 1\\ 3 & -7\end{vmatrix}=8(-7)-3.1=-59\neq 0$,

$D_x=\begin{vmatrix}17 & 1\\ -1 & -7\end{vmatrix}=17(-7)-(-1).1=-118$, $D_y=\begin{vmatrix}8 & 1\\ 3 & -7\end{vmatrix}=8(-7)-3.1=-59$

Hệ có một nghiệm duy nhất $\begin{cases}X=\dfrac{D_x}{D}=\dfrac{-118}{-59}=2\\ Y=\dfrac{D_y}{D}=\dfrac{-59}{-59}=1\end{cases}$ hay $\begin{cases}x=\dfrac{1}{2}\\ y=1\end{cases}$.

Thí dụ 2

Giải hệ phương trình $\begin{cases}(2a-1)x-y=1\\ x+(a+1)y=-1\end{cases}$

Lời giải

Ta có $D=\begin{vmatrix}2a-1 & -1\\ 1 & a+1\end{vmatrix}=(2a-1)(a+1)+1=a(2a+1)$, $D=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}a=0\\ a=-\dfrac{1}{2}\end{array}\right.$

Ta có $D_x=\begin{vmatrix}1 & -1\\ -1 & a+1\end{vmatrix}=(a+1)-1=a$, $D_y=\begin{vmatrix}2a-1 & 1\\ 1 & -1\end{vmatrix}=-(2a-1)-1=-2a$.

Trường hợp 1 : $-\dfrac{1}{2}\neq a\neq 0 \Leftrightarrow D\neq 0$ hệ có một nghiệm duy nhất

$$\begin{cases}x=\dfrac{D_x}{D}=\dfrac{1}{2a+1}\\ y=\dfrac{D_y}{D}=\dfrac{-2}{2a+1}\end{cases}$$

Trường hợp 2 : $a=0$ hệ trở thành $\begin{cases}-x-y=1\\ x+y=-1\end{cases}\Leftrightarrow y=-x-1$, hệ có vô số nghiệm

$\begin{cases}x \text{ tuỳ ý thuộc } R\\ y=-x-1\end{cases}$

Trường hợp 2 : $a=-\dfrac{1}{2}$, $\begin{cases}D=0\\ D_x=-\dfrac{1}{2}\neq 0\end{cases}$ hệ đã cho vô nghiệm.

Thí dụ 3 (Đ75)

Cho hệ phương trình $\begin{cases}6mx+(2-m)y=3\\ (m-1)x-my=2\end{cases}$ (1)

a) Giải biện luận theo tham số m .

b) Tìm hệ thức liên hệ giữa các nghiệm của hệ độc lập với tham số.

Lời giải

a) Ta có $D=\begin{vmatrix} 6m & 2-m \\ m-1 & -m \end{vmatrix} = -6m^2 + (m-1)(2-m) = (m+1)(2-5m)$

$$D_x=\begin{vmatrix} 3 & 2-m \\ 2 & -m \end{vmatrix} = -3m - 2(2-m) = -(m+4),\ D_y=\begin{vmatrix} 6m & 3 \\ m-1 & 2 \end{vmatrix} = 3(3m+1)$$

Trường hợp 1 : $D \neq 0 \Leftrightarrow (m+1)(2-5m) \Leftrightarrow -1 \neq m \neq \dfrac{2}{5}$, hệ có một nghiệm duy nhất

$$\begin{cases} x = \dfrac{D_x}{D} = \dfrac{-(m+4)}{(m+1)(2-5m)} = \dfrac{m+4}{(m+1)(5m-2)} \\ y = \dfrac{D_y}{D} = \dfrac{3(3m+1)}{(m+1)(2-5m)} \end{cases}$$

Trường hợp 2 : $D=0 \Leftrightarrow m=-1$ hoặc $m=\dfrac{2}{5}$ thì $D_x \neq 0 \Rightarrow$ hệ đã cho vô nghiệm.

b) Viết lại (1) $\Leftrightarrow \begin{cases} m(6x-y) = 3-2y \\ m(x-y) = 2+x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m(6x-y)(x-y) = (3-2y)(x-y) \\ m(x-y)(6x-y) = (2+x)(6x-y) \end{cases}$

$\Rightarrow (3-2y)(x-y) = (2+x)(6x-y) \Leftrightarrow (3-2y)(x-y)-(2+)(6x-y)=0$. Đó là hệ thức liên hệ giữa các nghiệm của hệ độc lập với tham số m mà ta phải tìm.

Bài toán 2. Hệ có nghiệm với giá trị của tham số

Thí dụ 1

Tìm a để với mọi b, luôn tồn tại c để hệ có nghiệm :

$$\begin{cases} bx - y = ac^2 \\ (b-6)x + mby = c+1 \end{cases};\ \text{với } m = 1;\ m = 2$$

Lời giải

Với m=1, có hệ

(I) $\begin{cases} bx - y = ac^2 \\ (b-6)x + by = c+1 \end{cases}$ $\quad D=\begin{vmatrix} b & -1 \\ b-6 & b \end{vmatrix} = b^2 + b - 6;\ \ D=0 \Leftrightarrow \left[\begin{matrix} b = -3 \\ b = 2 \end{matrix}\right.$

• Với mọi b : $-3 \neq b \neq 2$ ($D \neq 0$) Hệ (I) có nghiệm với mọi a. (1)

• $b = -3$, Hệ trở thành (II) $\begin{cases} -3x - y = ac^2 \\ -9x - 3y = c+1 \end{cases}$,

$D_x=\begin{vmatrix} ac^2 & -1 \\ c+1 & -3 \end{vmatrix} = -3ac^2 + c + 1,\ D_y=\begin{vmatrix} -3 & ac^2 \\ -9 & c+1 \end{vmatrix} = 3(3ac^2 - c - 1)$

Hệ (II) có nghiệm $\Leftrightarrow D_x=D_y=0 \Leftrightarrow 3ac^2-c-1=0$ (2)

Bài toán dẫn tới tìm a để phương trình (2) có nghiệm đối với c. (3)

+ Nếu a=0 ta có (2) $\Leftrightarrow c = -1 \Rightarrow a = 0$ là một giá trị phải tìm. (4)

+ Nếu a≠0 điều nói ở (3) đạt được khi và chỉ khi $\Delta_x > 0 \Leftrightarrow -\dfrac{1}{12} < a \neq 0$ (5)

Từ (4), (5) điều nói ở (3) đạt được khi và chỉ khi suy ra $a > -\dfrac{1}{12}$ (6)

• b = 2, hệ trở thành (III) $\begin{cases} 2x - y = ac^2 \\ -4x + 2y = c + 1 \end{cases}$

$$D_x = \begin{vmatrix} ac^2 & -1 \\ c+1 & 2 \end{vmatrix} = 2ac^2 + c + 1,\ D_y = \begin{vmatrix} 2 & ac^2 \\ -4 & c+1 \end{vmatrix} = -2(2ac^2 + c + 1)$$

Hệ (III) có nghiệm $\Leftrightarrow D_x = D_y = 0 \Leftrightarrow 2ac^2 + c + 1 = 0$ (7)

Tương tự trường hợp trên suy ra $a \leq \dfrac{1}{8}$ (8)

Từ (1), (6), (8) ta có tập hợp các giá trị phải tìm của a là : $-\dfrac{1}{12} < a \leq \dfrac{1}{8}$

Các bạn tự giải với m = 2

Thí dụ 2.

Tìm a, b để hệ có nghiệm với mọi m : $\begin{cases} (m+3)x + 4y = 5a + 3b + m \\ x + my = ma - 2b + 2m - 1 \end{cases}$

Lời giải

$$D = \begin{vmatrix} m+3 & 4 \\ 1 & m \end{vmatrix} = m^2 + 3m - 4;\ D = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 1 \\ m = -4 \end{array}\right.$$

• Với $-4 \neq m \neq 1 \Leftrightarrow D \neq 0$. Hệ có nghiệm duy nhất với mọi giá trị của a và b. (1)

• Với m = 1, hệ trở thành (I) $\begin{cases} 4x + 4y = 5a + 3b + 1 \\ x + y = a - 2b + 1 \end{cases}$

$$D_x = \begin{vmatrix} 5a + 3b + 1 & 4 \\ a - 2b + 1 & 1 \end{vmatrix} = a + 11b - 3,\ D_y = \begin{vmatrix} 4 & 5a + 3b + 1 \\ 1 & a - 2b + 1 \end{vmatrix} = -a - 11b + 3$$

Hệ (II) có nghiệm $\Leftrightarrow D_x = D_y = 0 \Leftrightarrow a + 11b = 3$ (2)

• Với m = −4, hệ trở thành (II) $\begin{cases} -x + 4y = 5a + 3b - 4 \\ x - 4y = -4a - 2b - 9 \end{cases}$

Tương tự trên, hệ (II) có nghiệm $\Leftrightarrow a + b = 13$ (3)

• Từ (1), (2), (3) suy ra hệ có nghiệm $\forall m \Leftrightarrow$ a, b là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} a + 11b = 3 \\ a + b = 13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 14 \\ b = -1 \end{cases}$$

Bài toán 3. Tìm giá trị nhỏ nhất của các biểu thức

$$Q = |ax + by + c| + |a'x + b'y + c'|;\ Q = (ax + by + c)^2 + (a'x + b'y + c')^2$$

Thí dụ 1. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $Q = |2x + y - 3| + |x + ay + 1|$

Lời giải

Xem hệ (I) $\begin{cases} 2x + y - 3 = 0 \\ x + ay + 1 = 0 \end{cases}$; $D = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & a \end{vmatrix} = 2a - 1$; $D = 0 \Leftrightarrow a = \frac{1}{2}$.

- Với $a \neq \frac{1}{2} \Leftrightarrow D \neq 0$ hệ (I) có nghiệm do đó min P=0. (1)
- Với $a = \frac{1}{2}$, biểu thức Q trở thành $Q = |2x+y-3| + \frac{1}{2}|2x+y+2|$ Đặt $t = 2x+y$, $t \in R$.

Ta có $Q = |t - 3| + \frac{1}{2}|t + 2|$ suy ra

$$Q = \begin{cases} 2 - \frac{3t}{2}, \text{ với } t \le -2 \\ 4 - \frac{t}{2}, \text{ với } -2 < t \le 3 \\ \frac{3t}{2} - 1, \text{ với } t > 3 \end{cases}$$

t	$-\infty$	-2	3	$+\infty$
$-2 - \frac{3t}{2}$	↘			
$4 - \frac{t}{2}$		↘		
$\frac{3t}{2} - 2$			↗	
Q	↘		$\frac{5}{2}$	↗

Bảng biến thiên cho thấy : Q(t) nghịch biến trên $(-\infty;3)$, Q(t) đồng biến trên $(3;+\infty)$ suy ra $\min\limits_{R} Q = Q(3) = \frac{5}{2}$ (2)

- Từ (1) và (2) kết luận : $\min Q = 0$, nếu $a \neq \frac{1}{2}$; $\min Q = \frac{5}{2}$ nếu $a = \frac{1}{2}$.

Chú ý 1. *Bạn có thể tìm min[(Q(t)] bằng cách vẽ đồ thị của hàm số y=Q(t).*

Chú ý 2. Nếu hệ số của x hoặc y trong 2 hạng tử trong vế phải có giá trị tuyệt đối bằng nhau bạn có thể tìm min Q theo các cách đánh giá bằng bất đẳng thức $|a| + |b| \ge |a + b|$. Các bạn theo dõi thí dụ sau.

Thí dụ 2.
Tìm giá trị nhỏ nhất của $Q = |3x - ay + 2| + |3x + y + a|$

Lời giải

Xét hệ (I) $\begin{cases} 3x - ay = -2 \\ 3x + y = -a \end{cases}$; $D = \begin{vmatrix} 3 & -a \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 3(a + 1)$.

* Với $a \neq -1 \Leftrightarrow D \neq 0$ hệ (1) có nghiệm duy nhất $\Rightarrow$ MinQ = 0

* Với $a = -1$ ta có $Q = |3x+y+2| + |3x+y-1| \geq |(3x+y+2) - (3x+y-1)| = 3$

Lại có Q(0; 0)=3. Vậy minQ = 3

Tóm lại $a \neq -1$: minQ = 0; $a = -1$: minQ = 3

> **Thí dụ 3.**
> Tìm giá trị nhỏ nhất của các biểu thức $Q = (x - 2y + 1)^2 + (2x + ay + 5)^2$

Lời giải

Xem hệ (I) $\begin{cases} x - 2y + 1 = 0 \\ 2x + ay + 5 = 0 \end{cases}$. $D = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & a \end{vmatrix} = a + 4$; $D = 0 \Leftrightarrow a = -4$.

- Với $a \neq -4 \Leftrightarrow D \neq 0$ hệ (I) có nghiệm $\Rightarrow$ Min Q=0 (1)
- Với $a = -4$ Biểu thức Q trở thành $Q = (x-2y+1)^2 + (2x-4y+5)^2$

Đặt $t = x - 2y + 3$, $t \in R$; Ta có $Q = (t-2)^2 + (1-2t)^2$.

Theo bất đẳng thức Bunhiacopski ta có

$$\frac{5}{4}Q = \left(1 + \frac{1}{4}\right)\left[(t-2)^2 + (1-2t)^2\right] \geq \left[1.(t-2) + \frac{1}{2}(1-2t)\right]^2 = \frac{9}{4} \Rightarrow Q \geq \frac{9}{5}$$

Dấu đẳng thức có khi $t - 2 = 2(1 - 2t) \Leftrightarrow t = \frac{4}{5} \Leftrightarrow x - 2y + \frac{11}{5} = 0$.

Suy ra $\min Q = \frac{9}{5}$

- Tóm lại : $a \neq -4$: min Q = 0, $a = -4$: $\min Q = \frac{9}{5}$

Bài toán 4. Hệ ba phương trình hai ẩn

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 & (1) \\ a_2x + b_2y = c_2 & (2) \\ a_3x + b_3y = c_3 & (3) \end{cases}$$

Với hệ 2 ẩn 3 phương trình cần hiểu : Tìm *m* để hệ có nghiệm là tìm m để hệ hai phương trình (chẳng hạn (1), (2)) có nghiệm thoả mãn phương trình còn lại.

> **Thí dụ 1**
> Tìm m để hệ $\begin{cases} mx + y = 1 & (1) \\ x + my = 1 & (2) \\ x + y = 1 & (3) \end{cases}$ có nghiệm.

Lời giải

Xét hệ phương trình $\begin{cases} x + my = 1 & (2) \\ x + y = 1 & (3) \end{cases}$, $D = \begin{vmatrix} 1 & m \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 - m$

- $m = 1$, hệ có nghiệm ($x = t$; $y = 1 - t$), $\forall t \in R$. (thoả mãn phương trình (1))

  $\Rightarrow$ m = 1 là một giá trị phải tìm. (4)
- $m \neq 1$, hệ có nghiệm ($x = 1 + m$; $y = -1$) (5)

Ta có (5) là nghiệm của hệ khi và chỉ khi $m(1+m) - 1 = 1 \Leftrightarrow m = -2$

- Tóm lại: hệ đã cho có nghiệm khi và chỉ khi $\{m = 1;\ m = -2\}$.

Thí dụ 2

Giả sử $\begin{cases} ax + by = c \\ bx + cy = a \\ cx + ay = b \end{cases}$ (1) có nghiệm. Chứng minh: $a^3+b^3+c^3=3abc$ (2)

Lời giải

(Đẳng thức (2) sẽ thu được khi tìm nghiệm của hệ hai phương trình, cho thoả mãn phương trình còn lại. Tuy vậy chúng ta hãy tiếp nhận một lời giải khá độc đáo sau)

Từ (1) suy ra $\begin{cases} a^3 = a^2a = a^2(bx+cy) = a^2bx + a^2cy \\ b^3 = b^2b = b^2(cx+ay) = b^2cx + b^2ay \\ c^3 = c^2c = c^2(ax+by) = c^2ax + c^2by \end{cases}$.

Cộng vế theo vế : $a^3+b^3+c^3 = ab\underbrace{(ax+by)}_{c} + bc\underbrace{(bx+cy)}_{a} + ca\underbrace{(cx+ay)}_{b}$

$\Leftrightarrow a^3+b^3+c^3 = 3abc$ *(đpcm)*

Thí dụ 3

Giải hệ (I) $\begin{cases} ay + bx = c & (1) \\ cx + az = b & (2) \\ bz + cy = a & (3) \end{cases}$, trong đó a, b, c là 3 cạnh của một tam giác.

Lời giải

Do a, b, c là 3 cạnh của một tam giác nên (3) $\Leftrightarrow z = \dfrac{a - cy}{b}$, thay vào (2) có

$$bx - ay = \frac{b^2 - a^2}{c} \qquad (2')$$

Bởi vậy ta có (I) $\Leftrightarrow$ (II) $\begin{cases} bx + ay = c & (1) \\ bx - ay = \dfrac{b^2 - a^2}{c} & (2') \\ z = \dfrac{a - cy}{b} & (3') \end{cases}$

Xem hệ hai phương trình (1) và (2') có $D = \begin{vmatrix} b & a \\ b & -a \end{vmatrix} = -2ab < 0$. Do đó hệ (II) có nghiệm duy nhất. (4)

Mặt khác, trong mọi tam giác luôn có $\begin{cases} \sin A\cos B + \cos A\sin B = \sin C \\ \sin A\cos C + \cos A\sin C = \sin B \\ \sin B\cos C + \cos B\sin C = \sin A \end{cases}$

$$\Leftrightarrow (5)\begin{cases}2R(\sin A\cos B+\cos A\sin B)=2R\sin C\\2R(\sin A\cos C+\cos A\sin C)=2R\sin B\\2R(\sin B\cos C+\cos B\sin C)=2R\sin A\end{cases} \Leftrightarrow (6)\begin{cases}a\cos B+b\cos A=c\\c\cos A+a\cos C=b\\b\cos C+c\cos B=a\end{cases}$$

Kết quả (6) thu được nhờ trong (5) thay a = 2RsinA, b = 2RsinB, c = 2RsinC

Các kết quả (5) và (6) cho thấy x=cosA, y=cosB, z=cosC là một nghiệm của hệ (1). Theo (4) đó cũng là nhiệm duy nhất của hệ ấy.

Theo định lý hàm số cosin thì cặp nghiệm duy nhất của hệ được viết

$$x=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\;;\; y=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}\;;\; z=\frac{b^2+a^2-c^2}{2ab}$$

Lời bình

- *Tìm ra lời giải bài toán này không khó, bạn có thể có nó bằng các phương pháp: thế, định thức Crame (cấp 2; 3).*
- *Sự "phối cảnh" giữa hai hệ (I) và (III) dẫn ra kết quả là một lời giải sống động, khai thác triệt để "bản sắc" trong tam giác.*

BÀI TẬP

Bài 1. Tìm a để hệ có nghiệm với mọi b : $\begin{cases}x+2by=a\\bx+(1-b)=a^2\end{cases}$

Bài 2. Tìm a để với mọi b, luôn tồn tại c để hệ có nghiệm :

1) $\begin{cases}x+2y=a\\bx+(1-b)=c^2+c\end{cases}$ 2) $\begin{cases}bx+y=ac^2\\x+by=ac+1\end{cases}$ 3) $\begin{cases}bx+y=a\\x+by=c^2+c\end{cases}$

Bài 3. Tìm giá trị nhỏ nhất của mỗi biểu thức sau :

1) $Q=|x+3y+5|+|ax+2y-7|$ 2) $Q=(ax-2y+3)^2+(x+2y-1)^2$

§2. HỆ PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI HAI ẨN

I. Hệ gồm một phương trình bậc nhất và một phương trình bậc hai

$$\begin{cases}ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=0 & (1)\\Ax+By+C=0 & (2)\end{cases}$$

CÁCH GIẢI

Giả sử $B\neq 0$, từ (2) suy ra $y=-\frac{A}{B}x-\frac{C}{B}$ thế vào (1) ta thu được phương trình bậc hai một ẩn đã biết cách giải.

Lưu ý

Liên quan đến hệ này, các bạn xem lại Bài toán 2 §3 Ứng dụng của biệt thức Δ, chương II

Thí dụ 1

Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2 - 3xy + y^2 + 2x + 3y - 4 = 0 & (1) \\ 2x - y = 1 & (2) \end{cases}$

Lời giải

Ta có (2) <=> $y = 2x - 1$, thế vào (1) có

$$x^2 - 3x(2x - 1) + (2x - 1)^2 + 2x + 3(2x - 1) - 4 = 0$$

<=> $x^2 - 7x + 6 = 0$ <=> $x = 1$ và $x = 6$.

Thế vào (2) : Với $x = 1$ có $y = 2.1 - 1 = 1$. Với $x = 6$ có $y = 2.6 - 1 = 11$.

Vậy hệ có hai nghiệm $(x = y = 1)$, $\begin{cases} x = 6 \\ y = 11 \end{cases}$.

Thí dụ 2 (Đại học Thương mại, 2000)

Cho phương trình $\begin{cases} x + my - m = 0 & (1) \\ x^2 + y^2 - x = 0 & (2) \end{cases}$

a) Tìm tập hợp các giá trị của m để hệ có hai nghiệm phân biệt.

b) Gọi $(x_1; y_1)$, $(x_2; y_2)$ là các nghiệm của hệ.

Chứng minh $(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 \le 1$

Lời giải

a) *Cách 1*: Ta có (1) <=> $x = m(1 - y)$ (3)

thế vào (2) có $m^2(1 - y)^2 + y^2 - m(1 - y) = 0$

<=> $(m^2 + 1)y^2 - m(2m - 1)y + m^2 - m = 0$ (4)

Với mỗi y, phương trình (1) cho duy nhất một giá trị của x, bởi thế nên hệ có nghiệm phân biệt <=> phương trình (4) có hai nghiệm phân biệt. Điều ấy có khi và chỉ khi $\Delta > 0$ <=> $m^2(2m - 1)^2 - 4(m^2 + 1)(m^2 - m) > 0$ <=> $m(4 - 3m) > 0$

<=> $0 < m < \frac{4}{3}$.

Cách 2 : Viết lại (2) <=> $\begin{cases} x + my - m = 0 \\ \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{1}{4} \end{cases}$ (4')

Gọi (Δ) là đường thẳng có phương trình (1), (𝒞) là đường tròn có tâm $I\left(\frac{1}{2};0\right)$,

bán kính $R = \frac{1}{2}$ được biểu thị bởi phương trình (4). Hệ có hai nghiệm phân biệt <=> Đường thẳng (Δ) cắt đường tròn (𝒞) tại hai điểm phân biệt

$\Leftrightarrow$ d(I, (Δ)) < R $\Leftrightarrow$ $\dfrac{\left|\dfrac{1}{2} + m.0 - m\right|}{\sqrt{1+m^2}} < \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow |2m - 1| < \sqrt{1+m^2} \Leftrightarrow 0 < m < \dfrac{4}{3}$

b) *Cách 1*: Với mọi điểm $M(x_1; y_1)$, $N(x_2; y_2)$ thuộc $(\mathscr{C})$ luôn có $MN \le 2R$

$\Leftrightarrow MN^2 \le 4R^2 = 4\cdot\dfrac{1}{4}$ hay $(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 \le 1$ (đpcm)

Cách 2 : Từ (3) $\Rightarrow x_2 - x_1 = -m(y_2 - y_1)$

$\Rightarrow (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 = (1 + m^2)(y_2 - y_1)^2$ (5)

• $y_{1,2}$ là nghiệm của (4) $\Rightarrow |y_2 - y_1| = \dfrac{\sqrt{\Delta}}{|a|} \Leftrightarrow (y_2 - y_1)^2 = \dfrac{\Delta}{a^2} = \dfrac{4m - 3m^2}{(m^2+1)^2}$

Thay vào (5) ta có $(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 = \dfrac{4m - 3m^2}{m^2+1} = 1 - \dfrac{(2m-1)^2}{m^2+1} \le 1$ (đpcm).

§3. HỆ ĐỐI XỨNG HAI ẨN

$$\begin{cases} f(x,y) = 0 & (1) \\ h(x,y) = 0 & (2) \end{cases}$$

Có những hệ phương trình không thay đổi khi tráo đổi vai trò x và y cho nhau. Người ta nói rằng đó là hệ phương trình đối xứng.

Bởi lẽ đó nên,

+ Nếu cặp $(x_0; y_0)$ là nghiệm thì cặp $(y_0; x_0)$ cũng là nghiệm của hệ.
+ Điều kiện cần để hệ có nghiệm duy nhất là $x_0 = y_0$

Các bạn làm quen với ba kiểu đối xứng sau đây.

I. Hệ đối xứng kiểu 1

Mỗi phương trình của hệ không đổi, khi tráo đổi vai trò x và y cho nhau được gọi là hệ đối xứng kiểu 1.

$$\begin{cases} f(x,y) = 0 \\ h(x,y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(y,x) = 0 \\ h(y,x) = 0 \end{cases}$$

Phương pháp *thường dùng* để giải hệ này là đặt ẩn phụ U = x + y, V = xy, hệ sẽ trở nên đơn giản hơn.

Thí dụ 1

Giải hệ phương trình (I) $\begin{cases} x^3 + y^3 = 19 & (1) \\ (x+y)(8+xy) = 2 & (2) \end{cases}$

Lời giải

Nhân phương trình (2) với 3 rồi cộng vế theo vế vào phương trình (1) có

$x^3 + y^3 + 3(x + y)(8 + xy) = 19 + 6 \Leftrightarrow x^3 + y^3 + 3xy(x + y) + 24(x + y) = 25$

$\Leftrightarrow (x+y)^3 + 24(x+y) - 25 = 0$

Đặt $x + y = t$, phương trình trở thành $t^3 + 24t - 25 = 0 \Leftrightarrow (t - 1)(t^2 + t + 25) = 0$

$$\Leftrightarrow (t - 1)\left[\left(t + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{99}{4}\right] = 0 \Leftrightarrow t - 1 = 0 \Leftrightarrow t = 1 \Rightarrow x + y = 1$$

Do vậy $(I) \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 1 \\ (x + y)(8 + xy) = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 1 \\ xy = -6 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} (x = 3; y = -2) \\ (x = -2; y = 3) \end{array}\right.$

Thí dụ 2.

Tìm m để hệ phương trình sau có đúng 2 nghiệm $\begin{cases} x^2 + y^2 = 2(1 - m) \\ (x + y)^2 = 4 \end{cases}$

Lời giải

Viết lại $(I) \Leftrightarrow \begin{cases} (x + y)^2 - 2xy = 2(1 - m) \\ (x + y)^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} (A)\begin{cases} xy = 1 - m \\ x + y = 2 \end{cases} & (1) \\ (B)\begin{cases} xy = 1 - m \\ x + y = -2 \end{cases} & (2) \end{array}\right.$

Nhận xét :

+ Nếu $(x_0; y_0)$ là nghiệm của hệ thì $(y_0; x_0)$, $(-x_0; -y_0)$, $(-y_0; -x_0)$ cũng là nghiệm của hệ ấy.

+ Từ các phương trình (1), (2) suy ra hai hệ (A) và (B) không thể có cùng có cả 2 nghiệm chung.

+ $S^2_{A,B} - 4P_{A,B} = 4 - 4(1 - m) = 4m \Rightarrow$ Hai hệ cùng có nghiệm khi $m > 0$, cùng vô nghiệm khi $m < 0$

Bởi thế nên hệ có đúng 2 nghiệm khi và chỉ khi cả hai hệ (A) và (B) đều có nghiệm $x = y \Leftrightarrow S^2_{A,B} - 4P_{A,B} = 0 \Leftrightarrow m = 0$

Thí dụ 3

Cho hệ phương trình $\begin{cases} x + y + xy = m + 1 \\ x^2y + xy^2 = m \end{cases}$ (I)

a) Giải hệ phương trình khi $m = 2$.

b) Tìm m để hệ có nghiệm $x > 0$, $y > 0$.

Lời giải

Viết lại $(I) \Leftrightarrow (II)\begin{cases} x + y + xy = m + 1 \\ (x + y)xy = m \end{cases}$ Đặt $U = x + y$, $V = xy$.

Điều kiện $U^2 \geq 4V$ (2). Hệ (II) trở thành $(III)\begin{cases} U + V = 1 + m \\ UV = m \end{cases}$

a) Khi m = 2, hệ (III) trở thành

$$\begin{cases} U + V = 3 \\ UV = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (U = 1; V = 2) & \text{(loại do (2))} \\ (U = 2; V = 1) \end{cases}$$

Với (U = 2; V = 1) có $\begin{cases} x + y = 2 \\ xy = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = 1.$

Đó là nghiệm duy nhất của hệ khi m = 2.

b) Ta có (III) $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} U = 1 \\ V = m \end{cases} \\ \begin{cases} U = m \\ V = 1 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} (A)\begin{cases} x + y = 1 \\ xy = m \end{cases} \\ (B)\begin{cases} x + y = m \\ xy = 1 \end{cases} \end{array}\right.$

• Hệ (I) có nghiệm x > 0, y > 0 ⇔ Hệ (A) hoặc hệ (B) có nghiệm x > 0, y > 0

+ Hệ (A) có nghiệm x > 0, y > 0 khi và chỉ khi $\begin{cases} m > 0 \\ 1 \geq 4m \end{cases} \Leftrightarrow 0 < m \leq \frac{1}{4}$ (3)

+ Hệ (b) có nghiệm x > 0, y > 0 khi và chỉ khi $\begin{cases} m^2 \geq 4 \\ m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \geq 2$ (4)

• Từ (3), (4) suy ra tập hợp các giá trị của m thoả mãn hệ (I) có nghiệm

x > 0, y > 0 là $\left[\begin{array}{l} 0 < m \leq \frac{1}{4} \\ m \geq 2 \end{array}\right.$

Thí dụ 4

Giải hệ phương trình (I) $\begin{cases} x + y = a & (1) \\ x^4 + y^4 = a^4 & (2) \end{cases}$

Lời giải

Cách 1:

Trường hợp 1 : x = 0 ⇒ y = a. Hệ luôn có nghiệm (0; a), ∀a ∈ R. (3)

Trường hợp 2 : x ≠ 0. Đặt y = xt (4), t ∈ R. Hệ trở thành

$$\begin{cases} x + xt = a \\ x^4 + x^4t^4 = a^4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(1 + t) = a \\ x^4(1 + t^4) = a^4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^4(1 + t)^4 = a^4 \\ x^4(1 + t^4) = a^4 \end{cases}$$

Trừ vế theo vế từng phương trình có $x^4[(1 + t)^4 - (1 + t^4)] = 0$

$\Leftrightarrow (1 + t)^4 - (1 + t^4) = 0$ (do $x \neq 0$) $\Leftrightarrow (1 + t)^4 - t^4 - 1 = 0$

$\Leftrightarrow 1 + 4t + 6t^2 + 4t^3 + t^4 - t^4 - 1 = 0 \Leftrightarrow t.(2t^2 + 3t + 2) = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 0 \\ 2t^2 + 3t + 2 = 0 \ \text{(VN)} \end{array}\right.$

Thay t = 0 vào (4) có y = 0

Thay y = 0 vào (1) có x = a ⇒ $\left[\begin{array}{l} a \neq 0: \text{hệ có nghiệm } (a;\ 0) \\ a = 0: \text{ hệ vô nghiệm (do } x \neq 0) \end{array}\right.$ 5)

Từ (3), (5) suy ra với $\forall a \in R$ hệ luôn có 2 nghiệm (0; a), (a; 0)

Cách 2: Đặt $\begin{cases} x = \dfrac{a}{2} - t \\ y = \dfrac{a}{2} + t \end{cases}, t \in R$ (6)

Phương trình (2) trở thành $\left(t + \dfrac{a}{2}\right)^4 + \left(t - \dfrac{a}{2}\right)^4 = a^4$

$\Leftrightarrow (t^4 + 2at^3 + \dfrac{3}{2}a^2t^2 + \dfrac{1}{2}a^3t + \dfrac{a^4}{16}) + (t^4 - 2at^3 + \dfrac{3}{2}a^2t^2 - \dfrac{1}{2}a^3t + \dfrac{a^4}{16}) = a^4$

$\Leftrightarrow 2t^4 + 3a^2t^2 - \dfrac{7a^4}{8} = 0 \Leftrightarrow t^2 = \dfrac{a^2}{4} \Leftrightarrow t = \pm\dfrac{a}{2}$

Thay vào (6) : với $t = \dfrac{a}{2}$ có (x = 0; y = a) ; với $t = -\dfrac{a}{2}$ có (x = a; y = 0)

Vậy với $\forall a \in R$ hệ phương trình có 2 nghiệm là (x = 0; y = a), (x = a; y = 0)

Thí dụ 5

Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^9 + y^9 = 1 & (1) \\ x^{25} + y^{25} = x^{16} + y^{16} & (2) \end{cases}$

Lời giải

Viết lại (1) $\Leftrightarrow 1 = x^9 + y^9$ (1')

Nhân vế theo vế với phương trình (2) có

$$x^{25} + y^{25} = (x^{16} + y^{16})(x^9 + y^9) \Leftrightarrow x^{25} + y^{25} = x^{25} + y^{25} + x^9y^9(x^7 + y^7)$$

$\Leftrightarrow x^9y^9(x^7 + y^7) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ y = 0 \\ x^7 + y^7 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ y = 0 \\ y = -x \end{array}\right.$. Thay vào (1):

Với $x = 0 \Rightarrow y^9 = 1 \Leftrightarrow y = 1$

Với $y = 0 \Rightarrow x^9 = 1 \Leftrightarrow x = 1$

Với $y = -x \Leftrightarrow y^9 = -x^9 \Leftrightarrow x^9 + y^9 = 0$ không thoả mãn phương trình (1) (loại)

Vậy hệ phương trình có hai nghiệm là (0; 1) và (1; 0)

II . Hệ đối xứng kiểu 2

Khi tráo đổi vai trò x và y cho nhau, phương trình (PT) này của hệ biến thành phương trình kia và ngược lại. Do vậy mà hệ không đổi.
Một hệ như thế được gọi là hệ đối xứng kiểu 2.

$$\begin{cases} f(x,y) = 0 & (1) \\ h(x,y) = 0 & (2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} h(y,x) = 0 \\ f(y,x) = 0 \end{cases}$$

Trừ vế theo vế các PT của hệ sẽ có PT hệ quả $(x - y)g(x) = 0$ (3)

Việc giải hệ phương trình đã cho đưa về giải hệ gồm phương trình (3) với một trong hai phương trình (1) hoặc (2)

Thí dụ 1

Giải hệ phương trình (I) $\begin{cases} 2x = y^2 - 4y + 5 & (1) \\ 2y = x^2 - 4x + 5 & (2) \end{cases}$

Lời giải

Trừ vế theo vế các phương trình (1) và (2) có $2(x - y) = y^2 - x^2 - 4(y - x)$

$\Leftrightarrow x^2 - y^2 - 2(x - y) = 0 \Leftrightarrow (x - y)(x + y - 2) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} y = x & (3) \\ x + y - 2 = 0 & (4) \end{array}\right.$

$$\text{Do vậy (I)} \Leftrightarrow \begin{cases} 2y = x^2 - 4x + 5 \\ \left[\begin{array}{l} y = x \\ y = 2 - x \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x^2 - 6x + 5 = 0 \\ y = x \end{cases} \\ \begin{cases} x^2 - 2x + 1 = 0 \\ y = 2 - x \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} (x - 1)(x - 5) = 0 \\ y = x \end{cases} \\ \begin{cases} (x - 1)^2 = 0 \\ y = 2 - x \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = y = 1 \\ x = y = 5 \end{array}\right.$$

Vậy phương trình có hai nghiệm là $(x = y = 1)$, $(x = y = 5)$

Thí dụ 2. (Đại học Hàng hải, 1997)

Cho hệ phương trình $\begin{cases} xy + x^2 = m(y - 1) \\ xy + y^2 = m(x - 1) \end{cases}$ (1)

a) Giải hệ khi $m = -1$.

b) Tìm m để hệ phương trình có nghiệm duy nhất.

Lời giải

Trừ theo từng vế của hệ ta có $x^2 - y^2 = m(y - x) \Leftrightarrow (x - y)(x + y + m)$

Do vậy (1) $\Leftrightarrow \begin{cases} xy + x^2 = m(y - 1) \\ (x - y)(x + y + m) = 0 \end{cases}$ (2)

a) Khi $m = -1$, ta có (1) $\Leftrightarrow \begin{cases} xy + x^2 = 1 - y \\ (x - y)(x + y - 1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy + x^2 = 1 - y \\ \left[\begin{array}{l} y = x \\ y = 1 - x \end{array}\right. \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 2x^2 = 1 - x \\ y = x \end{cases} \\ \begin{cases} x(1 - x) + x^2 = 1 - (1 - x) \\ y = 1 - x \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 2x^2 + x - 1 = 0 \\ y = x \end{cases} \\ \begin{cases} 0.x = 0 \\ y = 1 - x \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = -1 \text{ hoặc } x = \frac{1}{2} \\ y = x \end{cases} \\ \begin{cases} x \text{ tuỳ ý thuộc } R \\ y = 1 - x \end{cases} \end{array}\right.$$

Vậy hệ có tập nghiệm là : $\left[\begin{array}{l} x = y = -1 \\ x = y = \dfrac{1}{2} \\ (x \text{ tuỳ ý thuộc } R; y = 1 - x) \end{array}\right.$

b) • *Điều kiện cần.* Thấy rằng nếu hệ có nghiệm $(x_0; y_0)$ thì hệ cũng có nghiệm $(y_0; x_0)$. Bởi vậy điều kiện cần để hệ có nghiệm duy nhất là $x_0 = y_0$. Khi đó hệ trở thành $2x_0^2 = m(x_0 - 1) \Leftrightarrow 2x_0^2 - mx_0 + m = 0$ (3)

Từ (3) suy ra hệ có nghiệm duy nhất thì phương trình (3) có nghiệm duy nhất. Điều ấy có khi và chỉ khi $\Delta = 0 \Leftrightarrow m(m - 8) = 0 \Leftrightarrow m = 0$ hoặc $m = 8$.

• *Điều kiện đủ.*

+) Với m = 0 hệ trở thành $\begin{cases} xy + x^2 = 0 \\ xy + y^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x(x+y)=0$ hệ có vô số nghiệm

$\left[\begin{array}{l} (x = 0; y \text{ tuỳ ý thuộc } R) \\ (x \text{ tuỳ ý thuộc } R; y = -x) \end{array}\right. \Rightarrow$ m=0 không phải là giá trị phải tìm. (4)

+) Với m = 8 hệ trở thành $\begin{cases} xy + x^2 = 8(y - 1) \\ (x - y)(x + y + 8) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy + x^2 = 8(y - 1) & (5) \\ \left[\begin{array}{ll} y = x & (6) \\ y = -8 - x & (7) \end{array}\right. \end{cases}$

Thế (6) vào (5) có $2(x^2 - 4x + 4) = 0 \Leftrightarrow (x - 2)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$

$\Rightarrow$ hệ có nghiệm $x = y = 2$. (8)

Thế (7) vào (5) có $-x(8 + x) + x^2 = 8(-8 - x - 1) \Leftrightarrow 0 = 72$ (mâu thuẫn) (9)

Từ (8), (9) suy ra khi m = 8, hệ có nghiệm duy nhất $x = y = 2$. (10)

Từ (4), (10) kết luận hệ có nghiệm duy nhất khi và chỉ khi m = 8.

Thí dụ 3

Tìm a để hệ phương trình sau có nghiệm duy nhất $\begin{cases} y^2 = x^3 - 4x^2 + ax \\ x^2 = y^3 - 4y^2 + ay \end{cases}$ (I)

Lời giải

• *Điều kiện cần.* Thấy rằng nếu hệ có nghiệm $(x_0; y_0)$ thì hệ cũng có nghiệm $(y_0; x_0)$. Bởi vậy điều kiện cần để hệ có nghiệm duy nhất là $x_0=y_0$. Khi đó hệ trở thành $x_0^2 = x_0^3 - 4x_0^2 + ax_0 \Leftrightarrow x_0(x_0^2 - 5x_0 + a) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0 = 0 \\ x_0^2 - 5x_0 + a = 0 \end{array}\right.$.

Thấy rằng với $\forall a$, hệ luôn có nghiệm $x=y=0$. Bởi vậy hệ có nghiệm duy nhất thì điều kiện cần là phương trình $x^2 - 5x + a = 0$ (1) hoặc có nghiệm kép bằng 0, hoặc vô nghiệm.

Để ý: $b = -5 \neq 0$, phương trình (1) không thể có nghiệm kép bằng 0 (2)

Phương trình (1) vô nghiệm $\Leftrightarrow \Delta < 0 \Leftrightarrow 25 - 4a < 0 \Leftrightarrow a > \dfrac{25}{4}$

• *Điều kiện đủ.* Trừ vế theo vế các phương trình của hệ ta có:

$y^2 - x^2 = x^3 - y^3 - 4(x^2 - y^2) + a(x - y) \Leftrightarrow (x^3 - y^3) - 3(x^2 - y^2) + a(x - y) = 0$

$\Leftrightarrow (x-y)(x^2+xy+y^2-3x-3y+a)=0$ (3)

Để ý $x^2 + y^2 + xy - 3x - 3y + a = \frac{1}{4}(2x + y - 3)^2 + \frac{3}{4}(y - 1)^2 + (a - 3) > 0,\ \forall a > \frac{25}{4}$

Nên (3) $\Leftrightarrow$ x=y. Suy ra (I) $\Leftrightarrow \begin{cases} y^2 = x^3 - 4x^2 + ax \\ y = x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(x^2 - 5x + a) = 0 \\ y = x \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x\left[\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + a - \frac{25}{4}\right] = 0 \\ x = y \end{cases} \Leftrightarrow x = y = 0$$

Vậy $a > \frac{25}{4}$ là điều kiện cần và đủ để hệ có nghiệm duy nhất và nghiệm duy nhất ấy là $x = y = 0$.

§4. HỆ PHƯƠNG TRÌNH ĐỐI XỨNG KÉP

Một hệ *đối xứng* không thay đổi khi thế x bởi $\alpha - x$, y bởi $\alpha - y$ được gọi là ***hệ đối xứng kép***. (α là hằng số)

Bài toán.

Tìm m để hệ phương trình sau có nghiệm duy nhất

$$\text{(I)} \begin{cases} \sqrt{a + x} + \sqrt{b - y} = m \\ \sqrt{a + y} + \sqrt{b - x} = m \end{cases} \quad (a > 0, b > 0)$$

CÁCH GIẢI

1. Điều kiện cần.

Thấy rằng $(x_0; y_0)$ là nghiệm của hệ thì các cặp số sau đây cũng là nghiệm của hệ $(y_0; x_0)$; $(b - a - x_0; b - a - y_0)$; $(b - a - y_0; b - a - x_0)$. Bởi thế, nếu $(x_0; y_0)$ là nghiệm duy nhất của hệ thì $y_0 = x_0 = b - a - x_0 \Rightarrow y_0 = x_0 = \frac{b - a}{2}$.

Thay vào hệ thu được $m = \sqrt{2(a + b)}$ (1)

2. Điều kiện đủ.

Với $m = \sqrt{2(a + b)}$ hệ trở thành (I) $\begin{cases} \sqrt{a + x} + \sqrt{b - y} = \sqrt{2(a + b)} \\ \sqrt{a + y} + \sqrt{b - x} = \sqrt{2(a + b)} \end{cases}$

Cộng vế theo vế có $\left(\sqrt{a + x} + \sqrt{b - x}\right) + \left(\sqrt{a + y} + \sqrt{b - y}\right) = 2\sqrt{2(a + b)}$

Theo Bunhiacopski $\left(\sqrt{a + x} + \sqrt{b - x}\right) < \sqrt{2(a + b)}$;

$$\left(\sqrt{a + y} + \sqrt{b - y}\right) \le \sqrt{2(a + b)}$$

$$\Rightarrow \left(\sqrt{a+x}+\sqrt{b-x}\right)+\left(\sqrt{a+y}+\sqrt{b-y}\right)\le 2\sqrt{2(a+b)}$$

Dấu đẳng thức có khi $\begin{cases}\sqrt{a+x}=\sqrt{b-x}\\ \sqrt{a+y}=\sqrt{b-y}\end{cases} \Leftrightarrow x=y=\dfrac{b-a}{2}$

Bởi thế hệ phương trình (I) $\Leftrightarrow x=y=\dfrac{b-a}{2}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra điều kiện cần và đủ để hệ đã cho có nghiệm duy nhất là $m=\sqrt{2(a+b)}$

Thí dụ 1.

Tìm m để hệ phương trình sau có nghiệm duy nhất

$$\begin{cases}\sqrt{1+x}+\sqrt{7-y}=m\\ \sqrt{1+y}+\sqrt{7-x}=m\end{cases}$$

Lời giải

- *Điều kiện cần*

  Thấy rằng $(x_0; y_0)$ là nghiệm của hệ thì các cặp số sau đây cũng là nghiệm của hệ $(y_0; x_0)$; $(6-x_0; 6-y_0)$; $(6-y_0; 6-x_0)$.

  Bởi thế, $(x_0; y_0)$ là nghiệm duy nhất của hệ thì phải có $y_0=x_0=6-x_0$ $\Rightarrow y_0=x_0=3$. Thay vào hệ thu được $m=4$

- *Điều kiện đủ.* Với m=4, hệ trở thành : $\begin{cases}\sqrt{1+x}+\sqrt{7-y}=4\\ \sqrt{1+y}+\sqrt{7-x}=4\end{cases}$

  Cộng vế theo vế có : $\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{7-x}\right)+\left(\sqrt{1+y}+\sqrt{7-y}\right)=8$ (1)

  Theo Bunhiacopski $\begin{cases}\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{7-x}\right)\le\sqrt{1+1}\sqrt{1+7}=4\\ \left(\sqrt{1+y}+\sqrt{7-y}\right)\le\sqrt{1+1}\sqrt{1+7}=4\end{cases}$

  Cộng vế theo vế có $\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{7-x}\right)+\left(\sqrt{1+y}+\sqrt{7-y}\right)\le 8$

  Dấu đẳng thức có khi $\begin{cases}\sqrt{1+x}=\sqrt{7-x}\\ \sqrt{1+y}=\sqrt{7-y}\end{cases} \Leftrightarrow x=y=3$ (2)

  Từ (1), (2) suy ra hệ có nghiệm duy nhất khi và chỉ khi $m=4$.

Thí dụ 2

Tìm a để hệ có nghiệm duy nhất $\begin{cases}\sqrt{7+x}+\sqrt{11-y}-4=a-\sqrt{4-3\sqrt{10-3a}}\\ \sqrt{7+y}+\sqrt{11-x}-4=a-\sqrt{4-3\sqrt{10-3a}}\end{cases}$

Lời giải

• *Điều kiện cần.*

Thấy rằng $(x_0; y_0)$ là nghiệm của hệ thì các cặp số sau đây cũng là nghiệm của hệ : $(y_0; x_0)$; $(4-x_0; 4-y_0)$; $(4-y_0; 4-x_0)$.

Bởi thế $(x_0; y_0)$ là nghiệm duy nhất của hệ thì $y_0 = x_0 = 4 - x_0 \Rightarrow y_0 = x_0 = 2$.

Thay vào hệ thu được : $a-2=\sqrt{4-3\sqrt{10-3a}}$. Điều kiện $2 < a < \frac{10}{3}$.   (1)

Đặt $\sqrt{10-3a}=t-2$, $t>2$ (2)

Ta có hệ $\begin{cases} a-2=\sqrt{3-3(t-2)} \\ t-2=\sqrt{10-3a} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a-2)^2=10-3t \\ (t-2)^2=10-3a \end{cases}$ (3)

Trừ vế theo vế có : $(a-t)(a+t-4)=3(a-t) \Leftrightarrow (a-t)(a+t-7)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=a \\ t=7-a \end{array}\right.$

Thế vào (3) :

+ Với $t = a$, có (3) $\Leftrightarrow (a-2)^2=10-3a \Leftrightarrow a^2-a-6=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=3 \\ a=-2 \text{ (loại do (2))} \end{array}\right.$ (4)

+ Với $t = 7-a$, có (3) $\Leftrightarrow (a-2)^2=10-3(7-a) \Leftrightarrow a^2-7a+15=0$, vô nghiệm do $\Delta=-11<0$

Vậy $a = 3$ là điều kiện cần của bài toán.

• *Điều kiện đủ.* Với $a = 3$, hệ trở thành : $\begin{cases} \sqrt{7+x}+\sqrt{11-y}=6 \\ \sqrt{7+y}+\sqrt{11-x}=6 \end{cases}$

Cộng vế theo vế có $\left(\sqrt{7+x}+\sqrt{11-x}\right)+\left(\sqrt{7+y}+\sqrt{11-y}\right)=12$

Theo Bunhiacopski $\begin{cases} \left(\sqrt{7+x}+\sqrt{11-x}\right) \le \sqrt{1+1}\sqrt{7+11}=6 \\ \left(\sqrt{7+y}+\sqrt{11-y}\right) \le \sqrt{1+1}\sqrt{7+11}=6 \end{cases}$

Cộng vế theo vế có $\left(\sqrt{7+x}+\sqrt{11-x}\right)+\left(\sqrt{7+y}+\sqrt{11-y}\right)\le 12$

Dấu đẳng thức có khi $\begin{cases} \sqrt{7+x}=\sqrt{11-x} \\ \sqrt{7+y}=\sqrt{11-y} \end{cases} \Leftrightarrow x=y=2$ (5)

Từ (4), (5) kết luận hệ có nghiệm duy nhất khi và chỉ khi $a = 3$.

BÀI TẬP

Tìm a để hệ có nghiệm duy nhất

1) $\begin{cases} \sqrt{5+x}+\sqrt{3-y}=a \\ \sqrt{5+y}+\sqrt{3-x}=a \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \sqrt{1+6x}+\sqrt{37-6y}=a \\ \sqrt{1+6y}+\sqrt{37-6x}=a \end{cases}$

3) $\begin{cases} \sqrt{3+x}+\sqrt{1-y}+3-2\sqrt{2}=a+\sqrt{3+\sqrt{a}} \\ \sqrt{3+y}+\sqrt{1-x}+3-2\sqrt{2}=a+\sqrt{3+\sqrt{a}} \end{cases}$

§5. HỆ BẤT PHƯƠNG TRÌNH HAI ẨN VẾ TRÁI ĐẲNG CẤP BẬC HAI

Bài toán

Cho hệ sau phụ thuộc tham số m :

$$\begin{cases} f_1(x,y) = a_1x^2 + b_1xy + c_1y^2 \geq \alpha_1 + k_1(m) \\ f_2(x,y) = a_2x^2 + b_2xy + c_2y^2 \leq \alpha_2 + k_2(m) \end{cases} \quad (1)$$

Tìm m để hệ có nghiệm.

CÁCH GIẢI

(Làm xuất hiện phương trình hệ quả $[f_1(x,y)]^2 \leq k_3(m)$)

Từ (1) => $\alpha_1 f_2(x,y) - \alpha_2 f_1(x,y) \leq \alpha_1 k_2(m) - \alpha_2 k_1(m)$. (2)

Nếu (2) <=> $[f_3(x,y)]^2 \leq k_3(m)$ thì ta có (1) <=> $\begin{cases} f_1(x,y) \geq \alpha_1 + k_1(m) \\ [f_3(x,y)]^2 \leq k_3(m) \end{cases}$ (3)

* *Điều kiện cần :*

Nếu hệ $\begin{cases} k_1(m) \leq 0 \\ k_3(m) \geq 0 \end{cases}$ có tập nghiệm D khác rỗng thì $m \in D$ là điều kiện cần của bài và bài toán có thể giải tiếp tục như sau :

* *Điều kiện đủ :*

- Với mọi $m \in D$, ta có

$\begin{cases} \alpha_1 \geq \alpha_1 + k_1(m) \\ k_3(m) \geq 0 \end{cases}$ suy nếu $(x_0; y_0)$ là nghiệm của hệ $\begin{cases} f_1(x,y) = \alpha_1 \\ f_3(x,y) = 0 \end{cases}$ (4)

thì $(x_0; y_0)$ át nghiệm hệ (3) với mọi $m \in D$.

- Giải hệ (4) để chứng tỏ nó có nghiệm.

Thí dụ 1

Tìm a để hệ có nghiệm (I) $\begin{cases} 5x^2 + 4xy + 2y^2 \geq 3 & (1) \\ 7x^2 - 4xy + 2y^2 \leq \dfrac{2a-1}{2a+5} & (2) \end{cases}$

Lời giải

Viết lại (2) <=> $7x^2 - 4xy + 2y^2 \leq 1 - \dfrac{6}{2a+5}$ (3)

Nhân bất phương trình (3) với −3 có (3) <=> $-21x^2 + 12xy - 6y^2 \geq -3 + \dfrac{18}{2a+5}$ (4)

Cộng vế theo vế các bất phương trình (1) và (4) có

$$-4(2x-y)^2 \geq \frac{18}{2a+5} \Leftrightarrow (2x-y)^2 \leq \frac{-9}{2(2a+5)}$$

Bởi vậy : (I) $\Leftrightarrow$ (II) $\begin{cases} 5x^2 + 4xy + 2y^2 \geq 3 & (1) \\ (2x - y)^2 \leq \dfrac{-9}{2(2a+5)} & (5) \end{cases}$

• *Điều kiện cần.* Từ bất phương trình (5) suy ra $2a + 5 < 0 \Leftrightarrow a < -\dfrac{5}{2}$ (6)

• *Điều kiện đủ.* Ký hiệu $\mathcal{D} = (-\infty; -\dfrac{5}{2})$

Xét hệ (III) $\begin{cases} 5x^2 + 4xy + 2y^2 = 3 \\ (2x - y)^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 21x^2 = 3 \\ y = 2x \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left(x = -\dfrac{1}{\sqrt{7}}; y = -\dfrac{2}{\sqrt{7}}\right) \\ \left(x = \dfrac{1}{\sqrt{7}}; y = \dfrac{2}{\sqrt{7}}\right) \end{array}\right.$ (7)

Với mọi $a \in \mathcal{D}$ ta có $\begin{cases} 3 \geq 3 \\ 0 < \dfrac{-9}{2(2a+5)} \end{cases}$. Bởi vậy (7) nghiệm hệ phương trình (III) ắt nó nghiệm bất phương trình (II) với $\forall a \in \mathcal{D}$ (8)

Từ (6) và (8) suy ra hệ bất phương trình đã cho có nghiệm khi và chỉ khi $a < -\dfrac{5}{2}$

Chú ý. *Hệ đẳng cấp bậc hai chẵn đối với (x, y) bởi thế nếu hệ có nghiệm $(x_0; y_0)$ thì hệ cũng có nghiệm $(-x_0; -y_0)$.*

Thí dụ 2

Tìm a để hệ sau có nghiệm (I) $\begin{cases} x^2 + 2xy - 7y^2 \geq \dfrac{1-a}{1+a} & (1) \\ 3x^2 + 10xy - 5y^2 \leq -2 & (2) \end{cases}$

Lời giải

Viết lại (1) $\Leftrightarrow x^2 + 2xy - 7y^2 \geq -1 + \dfrac{2}{1+a} \Leftrightarrow -2x^2 - 4xy + 14y^2 \leq 2 - \dfrac{4}{1+a}$ (1')

Do vậy (I) $\Leftrightarrow$ (II) $\begin{cases} -2x^2 - 4xy + 14y^2 \leq 2 - \dfrac{4}{1+a} \\ 3x^2 + 10xy - 5y^2 \leq -2 \end{cases}$. Cộng vế theo vế các bất phương trình của hệ (II) có $x^2 + 6xy + 9y^2 \leq -\dfrac{4}{1+a} \Leftrightarrow (x + 3y)^2 \leq -\dfrac{4}{1+a}$ (3)

Do vậy (I) $\Leftrightarrow$ (II) $\Leftrightarrow$ (III) $\begin{cases} (x + 3y)^2 \leq -\dfrac{4}{1+a} \\ 3x^2 + 10xy - 5y^2 \leq -2 \end{cases}$

• *Điều kiện cần.*

Từ (3) suy ra điều kiện cần để hệ có nghiệm là $-\dfrac{4}{1+a} \geq 0 \Leftrightarrow a < -1$

• *Điều kiện đủ.*

Xem hệ $\begin{cases}(x+3y)^2 = 0\\ 3x^2+10xy-5y^2 = -2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x = -3y\\ 3x^2+10xy-5y^2 = -2\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}x = -3y\\ y^2 = \dfrac{1}{4}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x = -3y\\ y = \pm\dfrac{1}{2}\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\left(x = -\dfrac{3}{2}; y = \dfrac{1}{2}\right)\\ \left(x = \dfrac{3}{2}; y = -\dfrac{1}{2}\right)\end{array}\right.$ (4)

+ Với mọi $a < -1$ ta có $\begin{cases}0 < -\dfrac{4}{1+a}\\ -2 \le 2\end{cases}$ nên kết quả (4) cũng là nghiệm của hệ (III)

• Vậy $a < -1$ là tập hợp các giá trị phải tìm của a.

BÀI TẬP

Tìm a để các hệ bất phương trình sau có nghiệm

1) $\begin{cases}5x^2+7xy+2y^2 \ge \dfrac{3a+1}{a+2}\\ 3x^2+xy+y^2 \le 1\end{cases}$ **2)** $\begin{cases}3x^2-8xy-8y^2 \ge 2\\ x^2-4xy+2y^2 \le \dfrac{a+1}{2a+1}\end{cases}$

§6. HỆ LẶP BA ẨN

(I) $\begin{cases}x = f(y)\\ y = f(z)\\ z = f(x)\end{cases}$

CÁCH GIẢI

• Cơ sở lời giải là mệnh đề sau đây:

Mệnh đề

Cho hàm số f(t) có tập xác định D_f và tập có giá trị $A \subset D_f$
Nếu hàm số f(t) <u>đồng biến</u> trên tập xác định D_f, thì
$f(f(f(t))) = t \Leftrightarrow f(t) = t$

Thật vậy: theo giả thiết $A \subset D_f \Rightarrow f(t)$ và t đều thuộc D_f

Giả sử $f(t) > t \Leftrightarrow f[f(t)] \overset{\text{đb}}{>} f(t) \overset{\text{gt}}{>} t \Leftrightarrow f(f(f(t))) \overset{\text{đb}}{>} f(t) \overset{\text{gt}}{>} t$ hay $t > t$ (vô lý)

Với $f(t) < t$, thay dấu ">" bởi dấu "<" trong dòng trên ta có $t < t$ (vô lý)

• Trở lại hệ (I). Nếu f(t) là hàm số thoả mãn mệnh đề thì

$$\text{(I)} \Leftrightarrow \begin{cases}x = f(y)\\ y = f(z)\\ z = f(f(f(z)))\end{cases} \Leftrightarrow \text{(II)}\begin{cases}x = y = z\\ f(z) = z\end{cases}$$

• Như vậy việc giải hệ (I) quy về giải phương trình $f(t) = t$.

Thí dụ 1

Giải hệ phương trình (I) $\begin{cases} y^3 - 6x^2 + 12x - 8 = 0 & (1) \\ z^3 - 6y^2 + 12y - 8 = 0 & (2) \\ x^3 - 6z^2 + 12z - 8 = 0 & (3) \end{cases}$

Lời giải

Xét phương trình $t^3 - 6t^2 + 12t - 8 = 0 \Leftrightarrow t^3 = 6t^2 - 12t + 8 \Leftrightarrow t = \sqrt[3]{6t^2 - 12t + 8}$.

Xét hàm số $f(t) = \sqrt[3]{6t^2 - 12t + 8}$. Gọi $h(t) = 6t^2 - 12t + 8$. Rõ ràng

* $h(t)$ có tập giá trị là $[2; \infty) \Rightarrow f(t)$ có tập giá trị $A = [\sqrt[3]{2}; \infty)$

* $h(t)$ đồng biến trên $[1; \infty) \Rightarrow f(t)$ đồng biến trên $[1; \infty)$

$\Rightarrow f(t)$ đồng biến trên $A = [\sqrt[3]{2}; \infty)$ (do $A \subset [1; \infty)$)

Nên theo mệnh đề ta có $f(f(f(t))) = t \Leftrightarrow f(t) = t$

Viết lại (I) $\Leftrightarrow \begin{cases} y = f(x) \\ z = f(y) \\ x = f(z) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = f(x) \\ z = f(y) \\ x = f(f(f(x))) \end{cases} \Leftrightarrow$ (II) $\begin{cases} y = f(x) & (1') \\ z = f(y) & (2') \\ x = f(x) & (3') \end{cases}$

Từ (1'), (3') $\Rightarrow y = x$ (4)

Từ (2'), (3') $\Rightarrow z = y$ (5)

Từ (4), (5), (3') suy ra

(II) $\Leftrightarrow \begin{cases} x = y = z \\ f(x) = x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y = z \\ f^3(x) = x^3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y = z \\ (x-2)^3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = z = 2$

Chú ý 1. *Khi trình bày lời giải, học sinh nên trình bày trực tiếp theo "phương pháp ẩn chứng" mệnh đề (xem thí dụ 2).*

2. *Ngoài cách trên, thí dụ (1) còn có cách giải đoán nghiệm rồi chứng minh duy nhất như sau:*

• Ta có (3) $\Leftrightarrow x^3 = 6z^2 - 12z + 8 = 6(z-1)^2 + 2 \Rightarrow x \geq \sqrt[3]{2} > 0$

Tương tự cũng có $y > 0$, $z > 0$

Viết lại (I) $\Leftrightarrow \begin{cases} y^3 - 8 = 6x(x-2) & (1') \\ z^3 - 8 = 6y(y-2) & (2') \\ x^3 - 8 = 6z(z-2) & (3') \end{cases}$

• Rõ ràng $x = y = z = 2$ là một nghiệm của hệ. Ta sẽ chứng minh hệ chỉ có một nghiệm đó mà thôi.

Thật vậy

• Cộng vế theo vế các phương trình của hệ sẽ có $(x-2)^2 + (y-2)^2 + (z-2)^2 = 0$ (4)

• Giả sử hệ có nghiệm $(x; y; z) \neq (2; 2; 2)$ thế thì có ít nhất một trong 3 số x, y, z khác 2.

* Chẳng hạn $x \neq 2$.

Ta có $(x-2)^2 > 0$ suy ra $(x-2)^2 + (y-2)^2 + (z-2)^2 > 0$, mâu thuẫn với (4).

* Vai trò bình đẳng nên y, z cũng không thể khác 2.

• Vậy (2; 2; 2) là cặp nghiệm duy nhất của hệ đã cho. (đpcm)

Thí dụ 2

Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^3 - 3x^2 + 6x - 6 = y \\ y^3 - 3y^2 + 6y - 6 = z \\ z^3 - 3z^2 + 6z - 6 = x \end{cases}$ (1)

Lời giải

Xét hàm số $f(t) = t^3 - 3t^2 + 6t - 6 = (t-1)^3 + 3t - 5$

Tập xác định R.

Với mọi $t_1 \in R$, $t_2 \in R$: $t_1 < t_2$ ta có

$$f(t_2) - f(t_1) = [(t_2-1)^3 + 3t_2 - 5] - [(t_1-1)^3 + 3t_1 - 5]$$
$$= (t_2 - t_1)[(t_2-1)^2 + (t_1-1)^2 + (t_2-1)(t_1-1) + 3]$$
$$= (t_2 - t_1)\left[\left(t_2 - 1 + \frac{t_1 - 1}{2}\right)^2 + \frac{3(t_1-1)^2}{4} + 3\right]$$

Do $t_1 < t_2 \Rightarrow f(t_2) - f(t_1) > 0$ hay $f(t_1) < f(t_2) \Rightarrow f(t)$ là hàm đồng biến trên R

Theo mệnh đề $f(f(f(t))) = t \Leftrightarrow f(t) = t$, $\forall t \in R$.

Viết lại (1) $\Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = y \\ f(y) = z \\ f(z) = x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = y \\ f(y) = z \\ f(f(f(x))) = x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = y \\ f(y) = z \\ f(x) = x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y = z \\ f(x) = x \end{cases}$ (2)

+ Giải phương trình $f(x) = x \Leftrightarrow f(x) - x = 0$.

Gọi $h(x) = f(x) - x$, tức là $h(x) = x^3 - 3x^2 + 5x - 6 = (x-1)^3 + 2x - 5$.

Với mọi $t_1 \in R$, $t_2 \in R$: $t_1 < t_2$ ta có

$$h(t_2) - h(t_1) = (t_2 - t_1)\left[\left(t_2 - 1 + \frac{t_1 - 1}{2}\right)^2 + \frac{3(t_1-1)^2}{4} + 2\right]$$

Tương tự trên suy ra $h(x)$ đồng biến trên R.

Lại có $h(2) = 0$ suy ra $x = 2$ là nghiệm duy nhất củaphương trình $h(x) = 0$ trên R hay $f(x) = x$ có duy nhất 1 nghiệm trên R là $x = 2$

Do vậy (2) $\Leftrightarrow x = y = z = 2$.

Tóm lại hệ đã cho có một nghiệm duy nhất là $x = y = z = 2$.

BÀI TẬP

Giải các hệ phương trình sau

1) $\begin{cases} 2y^3 + 2x^2 + 3x + 3 = 0 \\ 2z^3 + 2y^2 + 3y + 3 = 0 \\ 2x^3 + 2z^2 + 3z + 3 = 0 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^2 = y - 1 \\ y^2 = z - 1 \\ z^2 = x - 1 \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x^3 - 9y^2 + 27y - 27 = 0 \\ y^3 - 9z^2 + 27z - 27 = 0 \\ z^3 - 9x^2 + 27x - 27 = 0 \end{cases}$

§7. HỆ GIẢI BẰNG ĐÁNH GIÁ

Thí dụ 1. *(Đánh giá bằng tập xác định)*

Giải hệ phương trình $\begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y+1} = 1 \\ \sqrt{y} + \sqrt{x+1} = 1 \end{cases}$

Lời giải

Điều kiện $\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$ Suy ra $\begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y+1} \geq 1 \\ \sqrt{y} + \sqrt{x+1} \geq 1 \end{cases}$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y = 0$.
Do vậy hệ có nghiệm duy nhất $x = y = 0$.

Thí dụ 2. *(Đánh giá bằng bất đẳng thức)*

Giải hệ phương trình (I) $\begin{cases} x^2y^2 - 2x + y^2 = 0 \\ 7x^2 - 14x + 3y^3 + 10 = 0 \end{cases}$

Lời giải

Viết lại (I) $\Leftrightarrow \begin{cases} (x^2 + 1)y^2 = 2x & (1) \\ 7(x-1)^2 + 3(1 + y^3) = 0 & (2) \end{cases}$

Từ (1) $\Rightarrow$ $y^2 = \dfrac{2x}{x^2+1} \leq 1 \Rightarrow |y| \leq 1 \Rightarrow 1 + y^3 \geq 0$

Lại có $(x-1)^2 \geq 0, \forall x$ nên (2) $\Rightarrow \begin{cases} (x-1)^2 = 0 \\ 1 + y^3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \end{cases}$ (3)

Kết quả (3) thoả mãn (1) $\Rightarrow$ (3) là nghiệm duy nhất của hệ phương trình (I).

Thí dụ 3. *(Đánh giá bằng tính chẵn lẻ)*

Tìm a để hệ phương trình sau có nghiệm duy nhất

$$\text{(I)} \begin{cases} 3x - a\sqrt{y^2+1} = 1 \\ x + y + \dfrac{1}{y + \sqrt{y^2+1}} = a^2 \end{cases}$$

(Học sinh giỏi lớp 10 tỉnh Hà Tĩnh, năm học 2000 - 2001)

Lời giải

Để ý $\dfrac{1}{y + \sqrt{y^2+1}} = \sqrt{y^2+1} - y$ nên hệ (I) $\Leftrightarrow$ (II) $\begin{cases} 3x - a\sqrt{y^2+1} = 1 \\ x + \sqrt{y^2+1} = a^2 \end{cases}$

Điều kiện cần

Thấy rằng nếu có nghiệm (x_0, y_0) thì hệ cũng có nghiệm $(x_0, -y_0)$.

Bởi vậy điều kiện cần để hệ có nghiệm duy nhất là $y_0 = 0$

Thay $y_0 = 0$ vào (II) có $\begin{cases} 3x - a = 1 \\ x + 1 = a^2 \end{cases} \Rightarrow 3a^2 - a - 4 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = -1 \\ a = \dfrac{4}{3} \end{array} \right.$

Điều kiện đủ

• $a = -1$, hệ (II) trở thành $\begin{cases} 3x + \sqrt{y^2 + 1} = 1 \\ x + \sqrt{y^2 + 1} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = 0$

• $a = \dfrac{4}{3}$, hệ (II) trở thành $\begin{cases} 3x - \dfrac{4}{3}\sqrt{y^2 + 1} = 1 \\ x + \sqrt{y^2 + 1} = \dfrac{16}{9} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{7}{9} \\ y = 0 \end{cases}$

hệ có nghiệm duy nhất **($x = \dfrac{7}{9}$; $y = 0$)**

Vậy tập hợp các giá trị của a tương thích với yêu cầu bài toán là

$$\left\{ a = -1 ;\ a = \frac{4}{3} \right\}$$

Thí dụ 4. ***(Đánh giá bằng tính chẵn lẻ)***

Tìm a để hệ phương trình sau có nghiệm duy nhất

$$\begin{cases} \sqrt{x^2 + 3} + |y| = a \\ \sqrt{y^2 + 5} + |x| = \sqrt{x^2 + 5} + \sqrt{3} - a \end{cases}$$

Lời giải

• *Điều kiện cần*

Thấy rằng, nếu hệ có nghiệm **(x_0; y_0) thì nó cũng có nghiệm** ($-x_0$; $-y_0$), ($-x_0$; y_0), (x_0; $-y_0$). **Bởi thế, nghiệm duy nhất của hệ chỉ có thể là $x_0 = y_0 = 0$.** Thay vào hệ có $a = \sqrt{3}$.

• *Điều kiện đủ*

Với $a = \sqrt{3}$, hệ trở thành $\begin{cases} \sqrt{x^2 + 3} + |y| = \sqrt{3} & (1) \\ \sqrt{y^2 + 5} + |x| = \sqrt{x^2 + 5} & (2) \end{cases}$

Để ý : $\sqrt{x^2 + 3} + |y| \geq \sqrt{3}$ **Dấu đẳng thức có khi $x = y = 0$.**

Suy ra (1) $\Leftrightarrow x=y=0$. **Thấy rằng $x = y = 0$ cũng là nghiệm của (2)**

$\Rightarrow x = y = 0$ **là nghiệm duy nhất của hệ .**

Tóm lại : Tập hợp các **giá trị phải tìm của a là** $a = \sqrt{3}$.

Thí dụ 5. *(Đánh giá bằng tính chẵn lẻ)*

Tìm a, b để hệ có nghiệm duy nhất $\begin{cases} xyz + z = a & (1) \\ xyz^2 + z = b & (2) \\ x^2 + y^2 + z^2 = 4 & (3) \end{cases}$

Lời giải

• *Điều kiện cần*

Thấy rằng $(x_o; y_0; z_0)$ là nghiệm của hệ thì $(-x_o; -y_0; z_0)$ cũng là nghiệm của hệ. Bởi thế, điều kiện cần để hệ có nghiệm duy nhất là $x_0 = y_0 = 0$.

Thay vào (3) thu được $z^2 = 4 \Leftrightarrow z = \pm 2$

Thay $z = \pm 2$ vào (1), (2) thu được $a = b = z = \pm 2$

• *Điều kiện đủ*

* Với a = b = 2, hệ trở thành (II) $\begin{cases} xyz + z = 2 & (1') \\ xyz^2 + z = 2 & (2') \\ x^2 + y^2 + z^2 = 4 & (3') \end{cases}$

Trừ vế theo vế các phương trình (1') và (2') suy ra $xyz(z-1)=0 \Rightarrow z=1$

- Với z = 1, (II) trở thành $\begin{cases} xy = 1 \\ x^2 + y^2 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy = 1 \\ x + y = \pm\sqrt{5} \end{cases}$

Xem hệ $\begin{cases} xy = 1 \\ x + y = \sqrt{5} \end{cases}$ (4)

Rõ ràng (4) là hệ đối xứng kiểu 1, đồng thời có $S^2 - 4P = 1 > 0$ suy ra (4) có 2 nghiệm. Suy ra với z=1 hệ có đã cho có không ít hơn hai nghiệm.

Vậy (a = b = 2) không thích hợp. (5)

* Với a = b = −2, hệ trở thành (III) $\begin{cases} xyz + z = -2 & (1'') \\ xyz^2 + z = -2 & (2'') \\ x^2 + y^2 + z^2 = 4 & (3'') \end{cases}$

Rõ ràng z = 0 không thoả mãn hệ (III).

Trừ vế theo vế các phương trình (1") và (2") suy ra $xyz(z-1)=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 1 \end{array}\right.$

Với $\left[\begin{array}{l} x = 0 \\ y = 0 \end{array}\right.$, dễ dàng suy ra (II) $\Leftrightarrow$ (0; 0; −2) (6)

Với z = 1, (II) trở thành $\begin{cases} xy = -3 \\ x^2 + y^2 = 3 \end{cases} \Rightarrow (x+y)^2 = -3$! (mâu thuẫn) (7)

• Từ (5), (6), (7) suy ra (a = b = −2) là cặp giá trị duy nhất thích hợp với yêu cầu bài toán.

Thí dụ 6. *(Đặc biệt hoá một ẩn)*

Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 + 2xy - zx - zy = 3 \\ x^2 + y^2 + yz - zx - 2xy = -1 \end{cases} \quad (1)$$

Lời giải

Viết lại (1) <=> $\begin{cases} (x + y)^2 - z(x + y) + z^2 - 3 = 0 \\ (x - y)^2 - z(x - y) + 1 = 0 \end{cases}$. (2)

Đặt $\begin{cases} u = x + y \\ v = x - y \end{cases}$ <=> $\begin{cases} x = \dfrac{u + v}{2} \\ y = \dfrac{u - v}{2} \end{cases}$. Hệ (2) trở thành : $\begin{cases} u^2 - zu + z^2 - 3 = 0 \\ v^2 - zv + 1 = 0 \end{cases}$ (3)

Hệ (3) có nghiệm <=> $\begin{cases} \Delta_u \geq 0 \\ \Delta_v \geq 0 \end{cases}$ <=> $\begin{cases} z^2 \leq 4 \\ z^2 \geq 4 \end{cases}$ <=> $z = \pm 2$

+ Với $z = 2$ có (3) <=> $u = v = 1$ => $\begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases}$ => Hệ đã cho có nghiệm (1; 0; 2)

+ Với $z = -2$ có (3) <=> $u = v = -1$ => $\begin{cases} x = -1 \\ y = 0 \end{cases}$

=> Hệ đã cho có nghiệm (−1; 0; −2)

• Tóm lại : Hệ đã cho có hai nghiệm là (1; 0; 2); (−1; 0; −2)

Nhận xét :

+ Số ẩn nhiều hơn số phương trình → đặc biệt hoá 1 ẩn, xem là tham số.

+ Sự vắng mặt hạng tử z^2 trong phương trình (2) cho ta thấy sự thiếu bình đẳng của nó đối với x và y

+ Sự phân tích trên dẫn chúng ta đặc biệt hoá ẩn z, xem nó là tham số.

Thí dụ 7. *(Đặc biệt hoá 1 ẩn)*

Giải hệ phương trình (I) $\begin{cases} (x + 3)^2 = 3 - 2y & (1) \\ z^2 + 4y^2 = 8y & (2) \\ (2z - x)(x + 3) = 5x + 16 & (3) \\ z \geq 0 & (4) \end{cases}$

Lời giải

Xem z là tham số, khi đó phương trình (2) trở thành $4(y - 1)^2 = -z^2 + 4$ (2')

Phương trình (2') có nghiệm khi và chỉ khi $z^2 \leq 4$ <=> $-2 \leq z \leq 2$ (5)

Phương trình (3) trở thành : $x^2 + 2(4 - z)x + 16 - 6z = 0$ (3')

Phương trình (3') có nghiệm <=> $\Delta'_x \geq 0$ <=> $z(z - 2) \geq 0$ <=> $\left[\begin{array}{l} z \leq 0 \\ z \geq 2 \end{array}\right.$ (6)

Từ (4), (5), (6) suy ra $\left[\begin{array}{l} z = 0 \\ z = 2 \end{array}\right.$.

+ Thay $z = 0$ vào các phương trình (3'), (2') sẽ lần lượt có $x = -4$, $\left[\begin{array}{l} y = 0 \\ y = 2 \end{array}\right.$

Cặp giá trị ($x = -4$; $y = 0$; $z = 0$) không thoả mãn hệ phương trình (I) (7)

Cặp giá trị ($x = -4$; $y = 2$; $z = 0$) thoả mãn hệ phương trình (I) (8)

+ Thay $z = 2$ vào các phương trình (3'), (2') sẽ lần lượt có $x = -2$; $y = 1$ (9)

Cặp giá trị ($x = -2$; $y = 1$; $z = 2$) thoả mãn hệ phương trình (I) (10)

• Từ (7), (8), (10) kết luận hệ đã cho có hai nghiệm là $(-4; 2; 0)$ và $(-2; 1; 2)$

Nhận xét

+ Sự có mặt bất đẳng thức (4) cho thấy tính đặc biệt của ẩn z đối với hệ đã cho.

+ Khi z được đặc biệt hoá, thì (2), (3) theo thứ tự trở thành phương trình một ẩn đối với x, y. Nhờ đó ta thu được các đánh giá độc lập đối với z.

Lời bình. *Chúng ta đã gặp kiểu bài các bài toán sau đây.*

Bài toán 1

Tìm phạm vi thay đổi của x, y biết rằng $x^2 + 12xy + 4y^2 + 4x + 8y + 20 = 0$ (1)

(*Một phương trình 2 ẩn*)

Lời giải

• Viết lại (1) $\Leftrightarrow x^2 + 4(3y + 1)x + 4(y^2 + 2y + 5) = 0$ (1')

Xem (1') là phương trình đối với x. Tập hợp các giá trị của y là nghiệm của

$$\Delta'_x \geq 0 \Leftrightarrow 4(3y + 1)^2 - 4(y^2 + 2y + 5) \geq 0 \Leftrightarrow 2y^2 + y - 1 \geq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y \leq -1 \\ y \geq \dfrac{1}{2} \end{array}\right.$$

hay $y \in A = R \backslash (-1; \frac{1}{2})$

• Viết lại (1) $\Leftrightarrow 4y^2 + 4(3x + 2)y + x^2 + 4x + 20 = 0$ (2')

Xem (2') là phương trình đối với y. Tập hợp các giá trị của x là nghiệm của

$$\Delta'_y \geq 0 \Leftrightarrow x^2+x-2 \geq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \leq -2 \\ x \geq 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow x \in B = R \backslash (-2; 1)$$

Trả lời : Phạm vi thay đổi của x là B, của y là A.

Bài toán 2

Cho x, y, z là nghiệm của hệ $\left\{\begin{array}{l} x + y + z = 5 \\ xy + yz + zx = 8 \end{array}\right.$ (I)

Chứng minh $1 \leq x; y; z \leq \dfrac{7}{3}$

Lời giải

Viết lại (I) <=> (II) $\begin{cases} x + y = 5 - z \\ xy = 8 - (5 - z)z \end{cases}$

Hệ (II) có nghiệm khi và chỉ khi $(5 - z)^2 \geq 4[8 - (5 - z)z] \Leftrightarrow 3z^2 - 10z + 7 \leq 0$

$\Leftrightarrow z \in C = \{ z \in \mathbb{R} \mid 1 \leq z \leq \frac{7}{3} \}$

Tương tự đặc biệt hoá y, x ta có đpcm.

+ *Trong hai bài toán trên, các tập hợp A, B, C có vô hạn các phần tử*

+ *Trong trường hợp các tập hợp A, B, C có hữu hạn các phần tử, bài toán được nêu dưới dạng giải phương trình. Các hệ phương trình trong hai thí dụ 6 và 7 được ghép nhiều phương trình như thế.*

BÀI TẬP

Bài 1. Giải các hệ phương trình sau

1) $\begin{cases} y + 2 = (3 - x)^3 \\ (2z - y)(y + 2) = 9 + 4y \\ x^2 + z^2 = 4x \\ z \geq 0 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} (2 - x)(3x - 2z) = 3 - x \\ y^3 + 3y^2 = x^3 - 3x + 2 \\ z^2 + y^2 = 6z \\ z \leq 3 \end{cases}$

Bài 2. Cho hệ phương trình $\begin{cases} x + \sqrt{y - 3} = m \\ y + \sqrt{x - 3} = m \end{cases}$

1) Giải hệ trên khi m=3.

2) Tìm m để hệ có nghiệm duy nhất.

Bài 3. Tìm a để các hệ phương trình $\begin{cases} x^2 + y^2 = z \\ x + y + z = a \end{cases}$ có nghiệm duy nhất.

Chương V

BẤT ĐẲNG THỨC

① *Phương pháp miền giá trị*
② *Phương pháp bất đẳng thức*
③ *Phương pháp tọa độ vectơ và tọa độ của điểm*
④ *Phương pháp sử dụng định lý sin, định lý cosin.*
⑤ *Sử dụng điểm rơi trong các bất đẳng thức Bec–nu–li, Cô–si và Bu–nhi–a–cop–xki*
⑥ *Phương pháp tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \max|f(x)|$*
(Phương pháp tam thức bậc hai đã trình bày trong chương I)

§1. PHƯƠNG PHÁP MIỀN GIÁ TRỊ

Phương pháp miền giá trị đã được xét trong §3 Ứng dụng của A, chương I.
Phần này chỉ chú trọng phương pháp tách bộ phận kép.

1. Dùng điều kiện có nghiệm của phương trình chứng minh bất đẳng thức

Xét hàm số $y=f(x)$ trên tập xác định D. y_0 là một giá trị của hàm số $f(x)$ trên D $\Leftrightarrow \exists x_0 \in D$: $f(x_0)=y_0$ hay phương trình $f(x)=y_0$ có nghiệm $x \in D$.

Thí dụ 1

Giả sử x, y liên hệ với nhau bởi hệ thức $3x^2 + 4xy + 3y^2 = 14$. Chứng minh

$$\frac{14}{5} < x^2 + y^2 < 14$$

Lời giải

Từ giả thiết bài toán suy ra x, y không đồng thời bằng 0. Gọi $Q(x, y) = x^2 + y^2$

Trường hợp 1. $x = 0$ hoặc $y = 0$ dễ dàng suy ra $Q = \dfrac{14}{3}$ (1)

Trường hợp 2. $xy \neq 0$, đặt $y = x.t$, $t \in R$ ta có:

$$\frac{Q}{14} = \frac{x^2(1+t^2)}{x^2(3+4t+3t^2)} \Leftrightarrow \frac{Q}{14} = \frac{1+t^2}{3+4t+3t^2} \quad (2)$$

Để ý $3t^2 + 4t + 3 > 0$, $\forall t \in R$ nên (2) $\Leftrightarrow Q(3t^2 + 4t + 3) = 14(1 + t^2)$

$\Leftrightarrow (3Q - 14)t^2 + 4Qt + 3Q - 14 = 0$ (3)

Trường hợp 1a). $3Q - 14 = 0 \Leftrightarrow Q = \dfrac{14}{3}$, khi đó (3) $\Leftrightarrow 4Qt = 0 \Leftrightarrow t = 0$

$\Rightarrow y = 0$, trái giả thiết $xy \neq 0$.

Trường hợp 1b). $3Q - 14 \neq 0$, Gọi $\Delta' = 4Q^2 - (3Q - 14)^2 = (5Q - 14)(14 - Q)$

Rõ ràng tập giá trị của Q là nghiệm của $\Delta' \geq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\frac{14}{5} \leq Q < \frac{14}{3} \\ \frac{14}{3} < Q \leq 14\end{array}\right.$ (4)

Dấu đẳng thức có khi và chỉ khi $t = \frac{2Q}{3Q-14}$ (5)

Do vậy thay vào (5) sẽ có :

+ $Q = \frac{14}{5}$ đạt được khi và chỉ khi $t = -1 \Leftrightarrow x = -y \neq 0$ (6.1)

+ $Q = 14$ đạt được khi và chỉ khi $t = 1 \Leftrightarrow x = y \neq 0$ (6.2)

Từ (1), (4), (6.1), (6.2) kết luận : $\frac{14}{5} \leq Q \leq 14$

(Chúng ta còn trở lại thí dụ này trong phương pháp "tách bộ phận kép" dưới đây)

2. Tách bộ phận kép để chứng minh bất đẳng thức

Thí dụ 2.

Tìm GTLN, GTNN của các biểu thức $Q = \frac{2x^2 + 4xy + 5y^2}{x^2 + y^2}$ với $x^2 + y^2 > 0$

Lời giải

Với $\forall k \in R$ ta có $Q + k = \frac{(k+2)x^2 + 4xy + (k+5)y^2}{x^2 + y^2}$ (1)

+ Với $k = -1$ có $Q - 1 = \frac{(x+2y)^2}{x^2 + y^2} \geq 0 \Rightarrow Q \geq 1$. Dấu đẳng thức có $\Leftrightarrow x = -2y \neq 0$

+ Với $k = -6$ có $Q - 6 = -\frac{(2x-y)^2}{x^2 + y^2} \leq 0 \Rightarrow Q \leq 6$. Dấu đẳng thức có $\Leftrightarrow 2x = y \neq 0$

$\Rightarrow$ MinQ = 1; MaxQ = 6

Lời bình

1) Gọi $\Delta' = 4 - (k+2)(k+5) = -k^2 - 7k - 6$. Ta có (1) đúng với $\forall k \in R \Rightarrow$ (1) ắt đúng với giá trị của k thoả mãn VP(1) có $\Delta' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} k = -1 \\ k = -6\end{array}\right.$.

Đó là điều giải thích sự có mặt của hai số –1 và –6 trong lời giải trên.

2) Việc tìm k thực hiện trên giấy nháp, không bắt buộc (không nên) trình bày trong bài làm

Thí dụ 3. Tìm GTLN, GTNN của biểu thức $Q(x) = \frac{3 + 8x^2 + 12x^4}{(1 + 2x^2)^2}$

Lời giải

Với mọi $a \in R$ ta có :

$$Q + a = \frac{3 + 8x^2 + 12x^4 + a(1 + 2x^2)^2}{(1 + 2x^2)^2} = \frac{3 + a + 4(2 + a)x^2 + 4(3 + a)x^4}{(1 + 2x^2)^2} \quad (1)$$

+ Với $a = -3$ ta có $Q - 3 = \dfrac{-4x^2}{(1 + 2x^2)^2} \le 0 \Rightarrow Q \le 3$.

Dấu đẳng thức có khi và chỉ khi $x=0$. Suy ra $\max Q = 3$

Xét $\Delta' = 4[(2 + a)^2 - (3 + a)^2]$, $\Delta' = 0 \Leftrightarrow (2 + a)^2 = (3 + a)^2 \Leftrightarrow a = -\dfrac{5}{2}$

+ Với $a = -\dfrac{5}{2}$ ta có $Q - \dfrac{5}{2} = \dfrac{(2x^2 - 1)^2}{2(1 + 2x^2)^2} \ge 0 \Rightarrow Q \ge \dfrac{5}{2}$.

Dấu đẳng thức có khi và chỉ khi $2x^2=1 \Leftrightarrow x = \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$. Suy ra $\min Q = \dfrac{5}{2}$

Thí dụ 4. *(Trở lại thí dụ 1)*

Biết rằng $3x^2+4xy+3y^2=14$. Chứng minh $\dfrac{14}{5} \le x^2 + y^2 \le 14$

Lời giải

- Để ý: $14 - Q = 2(x + y)^2 \ge 0 \Leftrightarrow Q \le 14$. Dấu đẳng thức có khi và chỉ khi

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ 3x^2 + 4xy + 3y^2 = 14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -y \\ x^2 = 7 \end{cases} \Leftrightarrow x = -y = \pm\sqrt{7}$$

- Để ý : $14 - 5Q = -2(x - y)^2 \le 0 \Leftrightarrow Q \ge \dfrac{14}{5}$. Dấu đẳng thức có khi và chỉ khi

$$\begin{cases} x - y = 0 \\ 3x^2 + 4xy + 3y^2 = 14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ 5x^2 = 7 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = \pm\sqrt{\frac{7}{5}}$$

Thí dụ 5

1) Tìm GTNN và GTLN của biểu thức $Q=\dfrac{a^2 - ab + b^2}{a^2 + ab + b^2}$ với $(a^2 + b^2 > 0)$

2) Cho a, b, c là các số thực dương có $a + b + c = 3$. Tìm GTNN của biểu thức

$$Q=\frac{a^3}{a^2 + ab + b^2} + \frac{b^3}{b^2 + bc + c^2} + \frac{c^3}{c^2 + ca + a^2}$$

Lời giải

1) Với $\forall k \in R$, ta có $Q + k=\dfrac{(1 + k)a^2 - (1 - k)ab + (1 + k)b^2}{a^2 + ab + b^2}$

Gọi $\Delta = (1 - k)^2 - 4(1 + k)^2 = -(k + 3)(3k + 1)$. $\Delta = 0 \Leftrightarrow \{k = -\dfrac{1}{3}; k = -3\}$

+ Với $k = \frac{1}{3}$ ta có: $Q - \frac{1}{3} = \frac{2(a-b)^2}{3(a^2+ab+b^2)} \geq 0 \Leftrightarrow Q \geq \frac{1}{3}$.

với $\forall(a, b)$: $a^2 + b^2 > 0$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b \neq 0$. Vậy $MinQ = \frac{1}{3}$.

+ Với $k = -3$ ta có $Q - 3 = \frac{-2(a+b)^2}{(a^2+ab+b^2)} \leq 0 \Leftrightarrow Q \leq 3$ với $\forall(a, b)$: $a^2 + b^2 > 0$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = -b \neq 0$. Vậy $MaxQ = 3$

2) *Cách 1.* Ta có $Q = \frac{a^4}{a(a^2+ab+b^2)} + \frac{b^4}{b(b^2+bc+c^2)} + \frac{c^4}{c(c^2+ca+a^2)}$

Theo Svacxơ: $Q \geq \frac{(a^2+b^2+c^2)^2}{a(a^2+ab+b^2)+b(b^2+bc+c^2)+c(c^2+ca+a^2)}$

$$= \frac{(a^2+b^2+c^2)^2}{a^2(a+b+c)+b^2(a+b+c)+c^2(a+b+c)} = \frac{(a^2+b^2+c^2)^2}{3(a^2+b^2+c^2)}$$

$$= \frac{a^2+b^2+c^2}{3}$$

Theo Bunhiacopski: $Q \geq \frac{a^2+b^2+c^2}{3} \geq \frac{(a+b+c)^2}{3.3} = \frac{3^2}{3^2} = 1 \Rightarrow Q \geq 1$

Dấu đẳng thức có khi và chỉ khi $a=b=c=1$. Vậy $minQ=1$.

Cách 2.

Ta có $\frac{a^3-b^3}{a^2+ab+b^2} + \frac{b^3-c^3}{b^2+bc+c^2} + \frac{c^3-a^3}{c^2+ca+a^2} = (a-b)+(b-c)+(c-a) = 0$

$$\Rightarrow Q = \frac{b^3}{a^2+ab+b^2} + \frac{c^3}{b^2+bc+c^2} + \frac{a^3}{c^2+ca+a^2}$$

$$\Rightarrow 2Q = \frac{a^3+b^3}{a^2+ab+b^2} + \frac{b^3+c^3}{b^2+bc+c^2} + \frac{c^3+a^3}{c^2+ca+a^2}$$

$$\Leftrightarrow 2Q = (a+b)\frac{a^2-ab+b^2}{a^2+ab+b^2} + (b+c)\frac{b^2-bc+c^2}{b^2+bc+c^2} + (c+a)\frac{c^2-ca+a^2}{c^2+ca+a^2}$$

Từ kết quả câu 1 suy ra: $2Q \geq \frac{1}{3}(a+b+b+c+c+a) \Leftrightarrow Q \geq \frac{1}{3}(a+b+c)$ $\forall a, b, c > 0$.

Kết hợp với $a + b + c = 3$ suy ra $Q \geq 1$. Dấu đẳng thức có khi và chỉ khi $a=b=c=1$

Vậy $MinQ=1$

Cách 3 (Đánh giá phần tử đại diện).

Trước hết, ta chứng minh $\forall a, b>0$ luôn có: $\frac{a^3}{a^2+ab+b^2} \geq \frac{2a-b}{3}$ (1)

Thật vậy: Do $a, b > 0$ nên (1) $\Leftrightarrow 3a^3 - (2a-b)(a^2+ab+b^2) \geq 0$

$\Leftrightarrow 3a^3 - (2a^3 - a^2b - ab^2 + b^3) \geq 0 \Leftrightarrow (a+b)(a-b)^2 \geq 0$ (2)

Bất đẳng thức (2) đúng. Dấu đẳng thức có khi và khi $a = b$.

Vậy (1) được chứng minh.

Tương tự ta cũng có : $\dfrac{b^3}{b^2+bc+c^2} \geq \dfrac{2b-c}{3}$; $\dfrac{c^3}{c^2+ca+a^2} \geq \dfrac{2c-a}{3}$ (3)

Cộng các BĐT cùng chiều trong (1) và (3) ta có $Q \geq \dfrac{1}{3}(a+b+c)$, $\forall$ a, b, c>0.

Đến đây tiếp nối như cách 1.

Thí dụ 6

Tìm GTNN và GTLN của biểu thức : $Q=\dfrac{(x+y)(1-xy)}{(1+x^2)(1+y)^2}$

Lời giải

Với $\forall k \in R$, ta có $Q+k=\dfrac{(x+y)(1-xy)+k(1+x^2)(1+y^2)}{(1+x^2)(1+y)^2}$

$$=\frac{\left[k(1+y^2)-y\right]x^2+(1-y^2)x+k(1+y^2)+y}{(1+x^2)(1+y^2)}$$

Gọi $\Delta=(1-y^2)^2-4[k(1+y^2)-y][k(1+y^2)+y]=(1-4k^2)(1+y^2)$

Suy ra $\Delta=0 \Leftrightarrow k=\pm\dfrac{1}{2}$

• Với $k=\dfrac{1}{2}$ có $Q+\dfrac{1}{2}=\dfrac{(1+y^2-2y)x^2+2(1-y^2)x+1+y^2+2y}{2(1+x^2)(1+y^2)}$

$$=\frac{(1-y)^2x^2+2(1-y^2)x+(1+y)^2}{2(1+x^2)(1+y^2)}=\frac{(1+x+y-xy)^2}{2(1+x^2)(1+y^2)} \geq 0$$

$\Rightarrow Q \geq -\dfrac{1}{2}$. Dấu đẳng thức có khi và chỉ khi $x+y=xy-1$

$\Rightarrow$ GTNN của Q là $Q=-\dfrac{1}{2}$

• Với $k=-\dfrac{1}{2}$ có $Q-\dfrac{1}{2}=\dfrac{-(1+y^2+2y)x^2+2(1-y^2)x-(1+y^2-2y)}{2(1+x^2)(1+y^2)}$

$$=\frac{-(1+y)^2x^2+2(1-y^2)x-(1-y)^2}{2(1+x^2)(1+y^2)}=-\frac{(1-x-y-xy)^2}{2(1+x^2)(1+y^2)} \leq 0$$

$\Rightarrow Q \leq \dfrac{1}{2}$. Dấu đẳng thức có khi và chỉ khi $x+y=1-xy$

$\Rightarrow$ GTLN của Q là $Q=\dfrac{1}{2}$

(Chúng ta còn trở lại Thí dụ này bằngcác phương pháp bất đẳng thức, toạ độ vectơ)

§2. PHƯƠNG PHÁP BẤT ĐẲNG THỨC

I. Các bất đẳng thức thường sử dụng

- ***Bất đẳng thức Cô-si :***

+ Bất đẳng thức Cô-si thông thường

Với mọi n số thực không âm $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ta luôn có

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}$$

Dấu đẳng thức có khi và chỉ khi $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$

+ Bất đẳng thức Cô–si mở rộng

Giả sử $a_1, a_2, \ldots, a_n$ là n số dương tuỳ ý và $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ là n số thực dương có $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n = 1$. Thế thì $\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \ldots \alpha_n a_n \geq a_1^{\alpha_1} a_2^{\alpha_2} \ldots a_n^{\alpha_n}$

Dấu đẳng thức có khi và chỉ khi $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$

- ***Bất đẳng thức Bunhiacopski***

+ Bất đẳng thức Bunhiacopski thông thường

Với 2n số thực $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$; $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ ta có

$$(a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_n b_n)^2 \leq (a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_n^2)$$

Dấu đẳng thức có khi và chỉ khi $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \ldots = \frac{a_n}{b_n}$

(Có sách còn gọi là bất đẳng thức Côsi–Svacxơ)

+ Bất đẳng thức Bunhiacopski mở rộng

Cho m dãy số thực không âm $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$; $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$; ...; $(c_1, c_2, \ldots, c_n)$

Ta có $(\underbrace{a_1 b_1 \ldots c_1}_{m \text{ số}} + \underbrace{a_2 b_2 \ldots c_2}_{m \text{ số}} + \ldots + \underbrace{a_n b_n \ldots c_n}_{m \text{ số}})^m$

$$\leq (a_1^m + a_2^m + \ldots + a_n^m)(b_1^m + b_2^m + \ldots + b_n^m) \ldots (c_1^m + c_2^m + \ldots + c_n^m)$$

Dấu đẳng thức có khi và chỉ khi $a_1 : b_1 : \ldots c_1 = a_2 : b_2 : \ldots c_2 = \ldots = a_n : b_n : \ldots : c_n$.

- ***Bất đẳng thức Svacxơ***

Với 2n số thực $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$; $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$, trong đó $b_i > 0$, $\forall i = 1, 2, \ldots, n$.

Ta có $\frac{a_1^2}{b_1} + \frac{a_2^2}{b_2} + \ldots + \frac{a_n^2}{b_n} \geq \frac{(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)^2}{b_1 + b_2 + \ldots + b_n}$

Dấu đẳng thức có khi và chỉ khi $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \ldots = \frac{a_n}{b_n}$.

II Các thí dụ

Thí dụ 7. (ĐH Ngoại thương, khối A, năm học 2001-2002)

Cho hai số dương x, y có $x + y = 1$. Tìm GTNN của biểu thức

$$Q = \frac{x}{\sqrt{1-x}} + \frac{y}{\sqrt{1-y}}$$

Lời giải

Viết lại $Q=\frac{x-1+1}{\sqrt{1-x}}+\frac{y-1+1}{\sqrt{1-y}}=\frac{1}{\sqrt{1-x}}+\frac{1}{\sqrt{1-y}}-(\sqrt{1-x}+\sqrt{1-y})$

Theo Cô–si : $\frac{1}{\sqrt{1-x}}+\frac{1}{\sqrt{1-y}}\geq\frac{2}{\sqrt[4]{(1-x)(1-y)}}\geq\frac{2}{\sqrt{\frac{1-x+1-y}{2}}}=2\sqrt{2}$ (1)

(do x+y=1)

Theo Bunhiacopski $\sqrt{1-x}+\sqrt{1-y}\leq\sqrt{2}.\sqrt{1-x+1-y}=\sqrt{2}$ (do x+y=1) (2)

Trừ theo từng vế các kết quả (1) và (2) ta có : $Q\geq\sqrt{2}$

Dấu đẳng thức trong các biến đổi trên đồng thời có khi và chỉ khi $\begin{cases}1-x=1-y\\x+y=1\end{cases}$

$\Leftrightarrow x=y=\frac{1}{2}$. Vậy min $Q=\sqrt{2}$

Thí dụ 8. (ĐH Nông nghiệp 1 Hà Nội, khối A, năm học 2000-2001)
Cho a, b, c là ba số dương có abc = 1. Tìm GTNN của biểu thức

$$Q=\frac{bc}{a^2(b+c)}+\frac{ca}{b^2(c+a)}+\frac{ab}{c^2(a+b)}$$

Lời giải

Cách trình bày 1: Đặt $\frac{1}{a}=x>0,\ \frac{1}{b}=y>0,\ \frac{1}{c}=z>$. Ta có $abc=1\Leftrightarrow xyz=1$

Biểu thức Q trở thành $Q=\frac{x^2}{y+z}+\frac{y^2}{z+x}+\frac{z^2}{x+y}$ (2)

Áp dụng bất đẳng thức Svacxơ vào (2) ta có

$Q\geq\frac{(x+y+z)^2}{(y+z)+(z+x)+(x+y)}=\frac{x+y+z}{2}\geq\frac{3\sqrt[3]{xyz}}{2}=\frac{3}{2}$ (do xyz=1) (3)

Dấu đẳng thức trong (2) và (3) đồng thời có khi và chỉ khi x=y=z =1

Vậy min $Q=\frac{3}{2}$

Cách trình bày 2: (Cân bằng bậc nhất cho ba biến với điểm rơi)
Tiếp nối từ (2)

Ta có $\frac{x^2}{y+z}+\frac{y+z}{4}\geq x,\ \frac{y^2}{z+x}+\frac{z+x}{4}\geq y,\ \frac{z^2}{x+y}+\frac{x+y}{4}\geq z$

Cộng vế theo vế các bất đẳng thức trên ta có

$$\frac{x^2}{y+z}+\frac{y+z}{4}+\frac{y^2}{z+x}+\frac{z+x}{4}+\frac{y^2}{z+x}+\frac{z+x}{4}\geq x+y+z$$

$\Leftrightarrow\frac{x^2}{y+z}+\frac{y^2}{z+x}+\frac{z^2}{x+y}\geq\frac{x+y+z}{2}\geq\frac{3\sqrt[3]{xyz}}{2}=\frac{3}{2}$ (do xyz = 1) (4)

Dấu đẳng thức trong (2) và (3) đồng thời có khi và chỉ khi $x = y = z = 1$

Vậy min $Q = \frac{3}{2}$.

Thí dụ 9. (Trở lại thí dụ 6§1chương V)

Tìm GTNN của biểu thức $Q = \frac{(x+y)(1-xy)}{(1+x^2)(1+y^2)}$

Lời giải

Theo bất đẳng thức Cô-si ta có

$$|(x+y)(1-xy)| \le \frac{1}{2}[(x+y)^2+(1-xy)^2] = \frac{1}{2}(x^2+y^2+1+x^2y^2) = \frac{1}{2}(1+x^2)(1+y^2)$$

$\Leftrightarrow \frac{|(x+y)(1-xy)|}{(1+x^2)(1+y^2)} \le \frac{1}{2}$. Dấu đẳng thức có khi và chỉ khi $|x+y| = |1-xy|$.

Suy ra

- MaxQ$= \frac{1}{2}$, đạt được khi và chỉ khi $x + y = 1 - xy$
- MinQ$= -\frac{1}{2}$, đạt được khi và chỉ khi $x + y = xy - 1$

Thí dụ 10

Gọi a, b, c là 3 cạnh của ΔABC. Chứng minh

$$Q = \frac{a}{b+c-a} + \frac{b}{c+a-b} + \frac{c}{a+b-c} \ge 3$$

Lời giải

Cách 1. Theo bất đẳng thức Cô-si ta có

$$\frac{a}{b+c-a} + \frac{b}{c+a-b} + \frac{c}{a+b-c} \ge 3\sqrt[3]{\frac{abc}{(a+b-c)(a-b+c)(b+c-a)}} \quad (3)$$

Để ý: Với mọi tam giác ABC luôn có

$$a^2 \ge a^2 - (b-c)^2 = (a+b-c)(a-b+c) > 0 \quad (4)$$

Tương tự $b^2 \ge (b-a+c)(b+a-c) > 0$, $c^2 \ge (c-a+b)(c+a-b) > 0$

Suy ra $(abc)^2 \ge (a+b-c)^2(a-b+c)^2(c+b-a)^2$

$\Leftrightarrow abc \ge (a+b-c)(a-b+c)(c+b-a)$

$\frac{abc}{(a+b-c)(a-b+c)(c+b-a)} \ge 1$. Thay vào (3) có $Q \ge 3$. Dấu đẳng thức có khi và chỉ khi $a = b = c \Leftrightarrow \Delta ABC$ đều. (đpcm)

Chú ý

- $abc \ge (a+b-c)(a-b+c)(c+b-a)$ với mọi số dương a, b, c là một ước lượng đáng nhớ. Chúng ta còn gặp lại ước lượng này trong một số thí dụ ở sau.
- Các phép biến đổi ở (4) được gọi là phép đánh giá non.

Cách 2. Đặt $\begin{cases} x = b + c - a > 0 \\ y = c + a - b > 0 \\ z = a + b - c > 0 \end{cases}$ Suy ra $a = \frac{y+z}{2}$, $b = \frac{z+x}{2}$, $c = \frac{x+y}{2}$ và

$$Q = \frac{1}{2}\left(\frac{y+z}{x} + \frac{z+x}{y} + \frac{x+y}{z}\right) = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right) + \left(\frac{y}{z} + \frac{z}{y}\right) + \left(\frac{z}{x} + \frac{x}{z}\right)\right]$$

Để ý $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2\ \forall x, y > 0$. Dấu đẳng thức có khi và chỉ khi $\frac{x}{y} = \frac{y}{x} \Leftrightarrow x = y > 0$

Suy ra $Q \geq \frac{1}{2}(2 + 2 + 2) = 3$. Dấu đẳng thức có khi và chỉ khi $x = y = z > 0$

$\Leftrightarrow a = b = c$

Cách 3. Để đơn giản cách viết, ta đặt $S = a + b + c \Rightarrow S - 2a = b + c - a$, $S - 2b = c + a - b$, $S - 2c = a + b - c$

Ta có $$Q + \frac{3}{2} = \left(\frac{a}{S-2a} + \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{b}{S-2b} + \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{c}{S-2c} + \frac{1}{2}\right)$$

$$= \frac{S}{2}\left(\frac{1}{S-2a} + \frac{1}{S-2b} + \frac{1}{S-2c}\right) \geq \frac{S}{2} \cdot \frac{3}{\sqrt[3]{(S-2a)(S-2b)(S-2c)}}$$

$$\geq \frac{S}{2} \frac{3.3}{(S-2a) + (S-2b) + (S-2c)} = \frac{9S}{2S} = \frac{9}{2}$$

$\Rightarrow Q \geq \frac{9}{2} - \frac{3}{2} = 3$. Dấu đẳng thức có khi và chỉ khi $S - 2a = S - 2b = S - 2c \Leftrightarrow a = b = c$

Lời bình

Khi Q códạng $Q = \frac{q_1 a_1}{U_1(a_1, a_2, \ldots, a_k)} + \frac{q_2 a_2}{U_2(a_1, a_2, \ldots, a_k)} + \ldots + \frac{q_k a_k}{U_k(a_1, a_2, \ldots, a_k)}$

trong đó $U_i(a_1, a_2, \ldots, a_k)$, $i = 1, 2, \ldots, k$ là các biểu thức bậc nhất, đồng thời các hoán vị vòng quang của $a_1, a_2, \ldots, a_k$ thì bằng cách đổi biến $x_i = U_i(a_1, \ldots, a_k)$, biểu thức Q trở thành Q' có dạng $Q' = p_1\frac{x_1}{x_2} + p_1\frac{x_1}{x_2} + \ldots + p_1\frac{x_3}{x_2}$. *Các đánh giá bất đẳng thức dễ thấy hơn trên Q'.*

> **Thí dụ 11** (Bất đẳng thức Nestbit)
>
> Cho ba số dương a, b, c. **Chứng minh** $Q = \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}$

Lời giải

Ta có $$Q + 3 = \left(\frac{a}{b+c} + 1\right) + \left(\frac{b}{c+a} + 1\right) + \left(\frac{c}{a+b} + 1\right)$$

$$= (a+b+c)\left(\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a}\right) \geq \frac{3(a+b+c)}{\sqrt[3]{(a+b)(b+c)(c+a)}}$$

$$\geq \frac{3.3(a+b+c)}{a+b+b+c+c+a} = \frac{9}{2} \Rightarrow Q \geq \frac{9}{2} - 3 = \frac{3}{2}$$

Dấu đẳng thức có khi và chỉ khi $a = b = c$. (đpcm)

Lời bình

Xét biểu thức $Q = \frac{p_1X_1}{Y_1} + \frac{p_2X_2}{Y_2} + \ldots + \frac{p_nX_n}{Y_n}$ *(p_i là các hằng số thực, $i = 1, 2, \ldots, n$)*

• *Nếu tồn tại bộ số thực $(q_1; q_2; \ldots; q_n)$, $q_i \neq 0$ $\forall i = 1, 2, \ldots, n$ sao cho $p_iX_i + q_iY_i$ có cùng một biểu thức chung, chẳng hạn $p_iX_i + q_iY_i = r_iC$*

$$\Rightarrow \frac{p_iX_i}{Y_i} + q_i = \frac{p_iX_i + q_iY_i}{Y_i} = \frac{r_iC}{Y_i}$$ *người ta thường biến đổi*

$$Q + \sum_{i=1}^{n} p_i = \left(\frac{p_1X_1}{Y_1} + q_1\right) + \left(\frac{p_2X_2}{Y_2} + q_2\right) + \ldots + \left(\frac{p_nX_n}{Y_n} + q_n\right)$$

$$= C\left(\frac{r_1}{Y_1} + \frac{r_2}{Y_2} + \ldots + \frac{r_n}{Y_n}\right)$$

Bí mật của Q dễ thấy hơn trong biểu thức $C\left(\frac{r_1}{Y_1} + \frac{r_2}{Y_2} + \ldots + \frac{r_n}{Y_n}\right)$

• *Bộ số thực q_i nói ở trên được gọi là* "bộ số đáng yêu" *của biểu thức Q.*

• *Trong bài trên $q_i = 1$ là* "bộ số đáng yêu" *của vế trái trong bất đẳng thức Nesbit. Đó là điều giải thích tại sao ta cộng thêm 3 đơn vị cho biểu thức Q. Các bạn theo dõi thí dụ tiếp theo.*

Thí dụ 12.

Cho n ($n \neq 3$) số thực dương $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Gọi $S = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$.

Chứng minh $Q := \frac{a_1}{S - ka_1} + \frac{a_2}{S - ka_2} + \ldots + \frac{a_n}{S - ka_n} \geq \frac{n}{n-k}$

trong đó k là một số thực thoả mãn : $\frac{k}{n} < \min\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$. (1)

Lời giải

Với mọi i ($i = 1, 2, \ldots, n$) ta có $\frac{a_i}{S - ka_i} + \frac{1}{k} = \frac{ka_i + S - ka_i}{k(S - ka_i)} = \frac{S}{k(S - ka_i)}$

$$\Rightarrow Q + \frac{n}{k} = \frac{S}{k}\left(\frac{1}{S - ka_1} + \frac{1}{S - ka_2} + \ldots + \frac{1}{S - ka_n}\right) \quad (2)$$

Để ý : Từ (1) $\Rightarrow S - ka_i > 0$. Do vậy áp dụng bất đẳng thức Cô–si vào vế phải của (2) ta có $Q + \frac{n}{k} \geq \frac{S.n}{k\sqrt[n]{(S - ka_1)(S - ka_2)\ldots(S - ka_n)}}$

$$\geq \frac{S.n.n}{k[(S - ka_1) + (S - ka_2) + \ldots + (S - ka_n)]}$$

$$\geq \frac{Sn^2}{k\left[nS - k(a_1 + a_2 + ... + a_n)\right]} = \frac{Sn^2}{k(nS - kS)} = \frac{n^2}{k(n-k)}$$

$$\Rightarrow Q \geq \frac{n^2}{k(n-k)} - \frac{n}{k} = \frac{n}{n-k} \Leftrightarrow Q \geq \frac{n}{n-k} \text{ (dpcm)}$$

Dấu đẳng thức có khi và chỉ khi $S - ka_1 = S - ka_2 = ... S - ka_n \Leftrightarrow a_1 = a_2 = ... = a_n$

(Với n=3, k=1 các bạn thấy lại bất đẳng thức Nestbit)

Thí dụ 13. Gọi a, b, c là 3 cạnh của ΔABC. Tìm **GTNN của biểu thức**

Chứng minh $Q = \frac{4a}{b+c-a} + \frac{9b}{c+a-b} + \frac{16c}{a+b-c} \geq 26$

Lời giải

Cách 1: Để đơn giản cách viết, đặt $S = a + b + c \Rightarrow S - 2a = b + c - a > 0$,

$S - 2b = c + a - b > 0$,

$S - 2c = a + b - c > 0$. Ta có $Q + \frac{29}{2} = \left(\frac{4a}{S-2a} + 2\right) + \left(\frac{9b}{S-a} + \frac{9}{2}\right) + \left(\frac{16c}{S-2c} + 8\right)$

$$= \frac{4S}{S-2a} + \frac{9S}{2(S-2b)} + \frac{8S}{S-2c} = \frac{S}{2}\left(\frac{2^2}{S-2a} + \frac{3^2}{S-2b} + \frac{4^2}{S-2c}\right) \quad (1)$$

Theo Svacxơ : $\frac{2^2}{S-2a} + \frac{3^2}{S-2a} + \frac{4^2}{S-2a} \geq \frac{(2+3+4)^2}{(S-2a)+(S-2b)+(S-2c)} = \frac{81}{S}$ (2)

Thay (1) vào (2) có : $Q + \frac{29}{2} \geq \frac{S}{2} \cdot \frac{81}{S} \Leftrightarrow Q \geq \frac{81-29}{2} = 26$ **(dpcm)**

Dấu đẳng thức có khi và chỉ khi $\frac{S-2a}{2} = \frac{S-2b}{3} = \frac{S-2c}{4}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{S-2a}{2} = \frac{S-2b}{3} \\ \frac{S-2a}{2} = \frac{S-2c}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5b + c = 5a \\ b + 3c = 3a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2b - c = a \\ b + 3c = 3a \end{cases} \Leftrightarrow \frac{a}{7} = \frac{b}{6} = \frac{c}{5} > 0.$$

[Lời giải trên đã sử dụng "*bộ số đáng yêu*" của Q là $(2; \frac{9}{2}; 4)$]

Cách 2. Đặt $\begin{cases} 2x = b + c - a > 0 \\ 2y = c + a - b > 0 \\ 2z = a + b - c > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = y + z \\ b = z + x \\ c = x + y \end{cases}$. Viết lại

$$2Q = \frac{4(y+z)}{x} + \frac{9(z+x)}{y} + \frac{16(x+y)}{z} = \left(4\frac{y}{x} + 9\frac{x}{y}\right) + \left(4\frac{z}{x} + 16\frac{x}{z}\right) + \left(9\frac{z}{y} + 16\frac{y}{z}\right)$$

Áp dụng bất đẳng thức Cô–si cho từng cặp số dương trong dấu ngoặc ta có

$$2Q \geq 2.\sqrt{4\frac{y}{x} \cdot 9\frac{x}{y}} + 2.\sqrt{4\frac{z}{x} \cdot 16\frac{x}{z}} + 2.\sqrt{9\frac{z}{y} \cdot 16\frac{y}{z}} = 12 + 16 + 24 = 52$$

$\Leftrightarrow Q \geq 26$ (dpcm). Dấu đẳng thức có khi và chỉ khi

$$\begin{cases} \dfrac{4y}{x} = \dfrac{9x}{y} \\ \dfrac{4z}{x} = \dfrac{16x}{z} \\ \dfrac{9z}{y} = \dfrac{16y}{z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4y^2 = 9x^2 \\ 4z^2 = 16x^2 \\ 9z^2 = 16y^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2y = 3x \\ 2z = 4x \\ 3z = 4y \end{cases} \Leftrightarrow \frac{x}{6} = \frac{y}{4} = \frac{z}{3} > 0.$$

Thí dụ 14

M là một điểm thuộc miền trong của ΔABC. Gọi A_1, B_1, C_1 theo thứ tự là chân các đường thẳng AM, BM, CM trên cạnh BC, CA, AB.

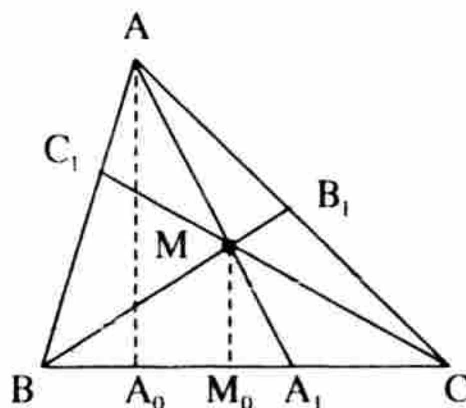
Chứng minh $Q = \dfrac{MA}{MA_1} + \dfrac{MB}{MB_1} + \dfrac{MC}{MC_1} \geq 6$ (1)

Lời giải

Gọi S, S_A, S_B, S_C theo thứ tự lần lượt là diện tích các tam giác ΔABC, ΔMBC, ΔMCA, ΔMAB $\Rightarrow S = S_1 + S_2 + S_3$. Ta có :

$$Q + 3 = \left(\frac{MA}{MA_1} + 1\right) + \left(\frac{MB}{MB_1} + 1\right) + \left(\frac{MC}{MC_1} + 1\right)$$

$$= \frac{AA_1}{MA_1} + \frac{BB_1}{MB_1} + \frac{CC_1}{MC_1} \quad (2)$$



Hình 19

Từ A, M kẻ các đường thẳng vuông góc với BC cắt BC theo thứ tự tại A_0, M_0

Rõ ràng $\dfrac{AA_1}{MA_1} = \dfrac{AA_0}{MM_0} = \dfrac{S}{S_1}$. Cũng vậy $\dfrac{BB_1}{MB_1} = \dfrac{S}{S_2}$, $\dfrac{CC_1}{MC_1} = \dfrac{S}{S_3}$

Bởi thế thay vào (2) ta có $Q + 3 = \dfrac{S}{S_1} + \dfrac{S}{S_2} + \dfrac{S}{S_3} = S\left(\dfrac{1}{S_1} + \dfrac{1}{S_2} + \dfrac{1}{S_3}\right)$

Theo Cô–si : $S\left(\dfrac{1}{S_1} + \dfrac{1}{S_2} + \dfrac{1}{S_3}\right) \geq \dfrac{3.S}{\sqrt[3]{S_1S_2S_3}} \geq \dfrac{3.3.S}{S_1 + S_2 + S_3} = \dfrac{9.S}{S} = 9$

$\Rightarrow Q + 3 \geq 9 \Leftrightarrow Q \geq 6$, dấu đẳng thức có khi và chỉ khi $S_1 = S_2 = S_3$

$\Leftrightarrow$ M là trọng tâm ΔABC (đpcm). (h. 19)

Thí dụ 15

Cho a, b, c là các số thực thay đổi thuộc [1; 2]

Tìm GTNN, GTLN của biểu thức $Q = (a+b+c)\left(\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c}\right)$

Lời giải

• *Giá trị nhỏ nhất* :

Theo Cô–si $(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) \geq 3\sqrt[3]{abc}.3\frac{1}{\sqrt[3]{abc}} = 9$ hay $Q \geq 9$

Dấu đẳng thức có khi $a = b = c > 0$. Suy ra MinQ = 9.

• *Giá trị lớn nhất* :

Từ $x \in [0; 1] \Rightarrow a, b, c \in [1; 2]$. Suy ra

• $\frac{1}{2} \leq \frac{a}{c} \leq 2 \Rightarrow \left(\frac{a}{c}-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{a}{c}-2\right) \leq 0 \Leftrightarrow \left(\frac{a}{c}\right)^2 - \frac{5}{2}\cdot\frac{a}{c}+1 \leq 0 \Leftrightarrow \frac{a}{c}+\frac{c}{a} \leq \frac{5}{2}$ (1)

Không mất tính tổng quát, giả sử $1 \leq a \leq b \leq c \leq 2$ suy ra

• $\left(1-\frac{a}{b}\right)\left(1-\frac{b}{c}\right)+\left(1-\frac{b}{a}\right)\left(1-\frac{c}{b}\right) \Leftrightarrow \frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{b}{a}+\frac{c}{b} \leq 2+\frac{a}{c}+\frac{c}{a}$. (2)

Ta có : $(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) = 3+\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{b}{a}+\frac{c}{b}\right)+\left(\frac{a}{c}+\frac{c}{a}\right)$

$\leq 3+\left(2+\frac{a}{c}+\frac{c}{a}\right)+\left(\frac{a}{c}+\frac{c}{a}\right)$ (3)

Từ (1), (2), (3) suy ra $Q \leq 3+2+\frac{5}{2}+\frac{5}{2} = 10$.

Dấu đẳng thức xảy ra khi $(a = 1, b = c = 2)$.

Tóm lại $Q \leq 10$ (đpcm). Do vai trò bình đẳng của a, b, c nên suy ra dấu đẳng thức khi và chỉ khi trong ba có hai số bằng 2, còn số kia bằng 1.

Vậy MaxQ = 10.

Thí dụ 16

Cho $a, b, c > 0$ và $ab + bc + ca = 36abc$. Tìm GTLN của biểu thức

$$Q = \frac{1}{2a+b+c}+\frac{1}{2b+c+a}+\frac{1}{2c+a+b}$$

Lời giải

• *Trước hết ta chứng minh* với $\forall x, y$ dương luôn có $\frac{1}{x+y} \leq \frac{1}{4x}+\frac{1}{4y}$ (1)

Thật vậy : Với mọi $x, y > 0$ ta có $(x-y)^2 \geq 0 \Leftrightarrow (x+y)^2 \geq 4xy$

$\Leftrightarrow \frac{1}{x+y} \leq \frac{x+y}{4xy} \Leftrightarrow \frac{1}{x+y} \leq \frac{1}{4x}+\frac{1}{4y}$ (đpcm)

Theo (1) : $\frac{1}{2a+b+c} \leq \frac{1}{8a}+\frac{1}{4(b+c)} \leq \frac{1}{8a}+\frac{1}{16b}+\frac{1}{16c}$ (2)

Tương tự : $\frac{1}{2b+c+a} \leq \frac{1}{8b}+\frac{1}{16c}+\frac{1}{16a}$ (3)

$$\frac{1}{2c+a+b} \le \frac{1}{8c} + \frac{1}{16a} + \frac{1}{16b} \qquad (4)$$

Cộng vế theo vế các bất đẳng thức (2), (3), (4) ta có

$$Q \le \frac{1}{4}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) = \frac{ab+bc+ca}{4abc} \qquad (5)$$

Theo giả thiết $ab + bc + ca = 36abc$, thay vào (5) có $Q \le \frac{36abc}{4abc} = 9$

Dấu đẳng thức có khi và chỉ khi $\begin{cases} a = b = c \\ 3a^2 = 36a^3 \end{cases} \Leftrightarrow a = b = c = \frac{1}{12}$. Vậy $\max Q = 9$

Thí dụ 17

Cho $a \ge 3$, $b \ge 4$, $c \ge 2$. Tìm GTLN của biểu thức

$$Q = \frac{ab\sqrt{c-2} + bc\sqrt{a-3} + ca\sqrt{b-4}}{abc}$$

Lời giải

Từ giả thiết suy ra các số có mặt trong căn thức đều có nghĩa.

Theo Cô-si: $\frac{\sqrt{c-2}}{c} = \frac{\sqrt{2(c-2)}}{c\sqrt{2}} \le \frac{1}{2\sqrt{2}} \Leftrightarrow \frac{ab\sqrt{c-2}}{abc} \le \frac{1}{2\sqrt{2}}$

Tương tự : $\frac{bc\sqrt{a-3}}{abc} \le \frac{1}{2\sqrt{3}}$; $\frac{ca\sqrt{b-4}}{abc} \le \frac{1}{2\sqrt{4}}$

Cộng các bất đẳng thức cùng chiều trên ta có $Q \le \frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{2\sqrt{3}} + \frac{1}{2\sqrt{4}}$

Dấu đẳng thức có khi và chỉ khi $\begin{cases} 2 = c - 2 \\ 3 = a - 3 \\ 4 = b - 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 4 \\ a = 6 \\ b = 8 \end{cases}$

Suy ra GTLN của Q là $Q = \frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{2\sqrt{3}} + \frac{1}{2\sqrt{4}}$

Thí dụ 18

Cho x, y là các số thay đổi thoả mãn điều kiện $0 \le x \le 3$, $0 \le y \le 4$.
Tìm GTLN của biểu thức $Q = (3 - x)(4 - y)(2x + 3y)$

Lời giải

Viết lại $Q = \frac{1}{6}.2(3 - x)3(4 - y)(2x + 3y) = \frac{1}{6}(6 - 2x)(12 - 3y)(2x + 3y)$

Rõ ràng với $0 \le x \le 3$, $0 \le y \le 4$ thì các số $(6-2x)$, $(12-3y)$, $(2x+3y)$ đều không âm.

Theo Cô-si: $Q \le \frac{1}{6}\left(\frac{(6-2x) + (12-3y) + (2x+3y)}{3}\right)^3$ hay $Q \le 36$.

Dấu đẳng thức có khi và chỉ khi $\begin{cases} 6-2x=12-3y \\ 6-2x=2x+3y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=2 \end{cases}$

Suy ra maxQ = 36.

Lời bình

1) Tiềm ẩn đằng sau sự thay đổi của các biến x và y lại là sự không đổi của tổng các biểu thức (6 – 2x), (12–3y) *và* (2x+3y)

2) Sự mách bảo nào dẫn ta đến các nhân tử $2\ ;3;\frac{1}{6}$ *trong sự biến đổi trên?*

Trả lời :: *Với* $\forall a, b > 0$ *ta có* $Q = \frac{1}{ab}[a(3-x)][b(4-y)](2x+3y)$. *Ta đi tìm cặp* (a; b) *sao cho tổng sau không phụ thuộc vào x và y* : $Q' = a(3-x)+b(3-y)+(2x+3y)$ $\Leftrightarrow Q' = 3a + 3b + (2-a)x + (3-b)y$.

Điều đó xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} 2-a=0 \\ 3-b=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=3 \end{cases}$

Thí dụ 19

Tìm trên $D=\left[-\frac{1}{2};\frac{1}{3}\right]$ GTLN của $Q=(2x+1)^5(1-3x)^3$.

Lời giải

Viết lại $Q = \frac{9^3}{10^3}(2x+1)^5\left[\frac{10}{9}(1-3x)\right]^3$. Trên D ta có $2x + 1 \geq 0$; $1 - 3x \geq 0$.

Áp dụng Cô–si cho 8 số không âm gồm 5 số là 2x+1 và 3 số là $\frac{10}{9}(1-3x)$

ta có $Q \leq \frac{9^3}{10^3}\left\{\frac{1}{8}\left[5(2x+1)+3\frac{10}{9}(1-3x)\right]\right\}^8 = \frac{9^3}{10^3}\frac{25^8}{23^8} = \frac{5^{13}}{9.2^{27}}$

Dấu đẳng thức có khi và chỉ khi $2x + 1 = \frac{10}{9}(1-3x) \Leftrightarrow x = \frac{1}{48} \in D$

Vậy $Q = \frac{5^{13}}{9.2^{27}}$ là GTLN của Q trên D.

Lời bình

Cũng như thí dụ 15 ở trên, với $\forall a > 0$ *ta có* $Q = \frac{1}{a^3}(2x+1)^5(a-3ax)^3$. *Ta tìm số a thoả mãn* $Q' = 5(2x+1) + 3a(1-3x) \Leftrightarrow Q' = 5 + 3a + (10-9a)x$ *không phụ thuộc x. Điều đó có khi và chỉ khi* $10 - 9a = 0 \Leftrightarrow a = \frac{10}{9}$

Thí dụ 20. Cho x>1,3. (*) Tìm GTNN của $Q=\frac{3x^3-9x^2+9x+45}{x-1}$

Lời giải

Viết lại $Q = 3(x-1)^2 + \frac{48}{x-1} = 3(x-1)^2 + \frac{24}{x-1} + \frac{24}{x-1}$. Với $x > 1, 3 <> x - 1 > 0$.

Theo Cô si ta có $3(x-1)^2 + \frac{24}{x-1} + \frac{24}{x-1} \geq 3\sqrt[3]{\frac{3(x-1)^2 24.24}{(x-1)^2}} = 36$

Suy ra $Q > 36$

Dấu đẳng thức có khi $3(x-1)^2 = \frac{24}{x-1} \Leftrightarrow (x-1)^3 = 8 \Leftrightarrow x = 3$ (thích hợp (*)).

Vậy $\min Q = 36$

Lời bình. *Biểu thức Q có dạng*

$$Q = M(x+a)^m + \frac{N}{(x+a)^n} \Leftrightarrow Q = \underbrace{\frac{M(x+a)^m}{p} + \frac{M(x+a)^m}{p} + \ldots + \frac{M(x+a)^m}{p}}_{p \text{ số hạng}}$$

$$+ \underbrace{\frac{N}{q(x+a)^n} + \frac{N}{q(x+a)^n} + \ldots + \frac{N}{q(x+a)^n}}$$

$$\Rightarrow Q \geq Q^* = (p+q)\sqrt[p+q]{\left(\frac{M}{p}\right)^p\left(\frac{N}{q}\right)^q (x+a)^{mp-nq}}$$

Ta đi tìm p; q để Q^* không phụ thuộc x. Điều đó có khi và chỉ khi $mp - nq = 0$

$\Leftrightarrow \frac{p}{n} = \frac{q}{m}$ *Trong thí dụ trên $(m=2; n=1) \Rightarrow (p=1; q=2)$*

Thí dụ 21. (ĐH Đà Nẵng, khối A, năm học 2001- 2002)
Cho x, y, z là các số thực dương thoả mãn : $x^2 + y^2 + z^2 = 1$
Tìm GTNN của biểu thức $Q = \frac{x}{y^2+z^2} + \frac{y}{z^2+x^2} + \frac{z}{x^2+y^2}$

Lời giải

Cách 1. (Tách bộ phận kép)

Từ giả thiết suy ra $0 < x, y, z < 1$ và $Q = \frac{x}{1-x^2} + \frac{y}{1-y^2} + \frac{z}{1-z^2}$ (1)

Ta có $Q - \frac{3\sqrt{3}}{2} = Q - \frac{3\sqrt{3}}{2}(x^2 + y^2 + z^2)$

$$= \left(\frac{x}{1-x^2} - \frac{3\sqrt{3}}{2}x^2\right) + \left(\frac{y}{1-y^2} - \frac{3\sqrt{3}}{2}y^2\right) + \left(\frac{z}{1-z^2} - \frac{3\sqrt{3}}{2}z^2\right)$$

$$= \frac{2+\sqrt{3}x}{1-x^2}\left(x - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 + \frac{2+\sqrt{3}y}{1-y^2}\left(y - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 + \frac{2+\sqrt{3}z}{1-z^2}\left(z - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2$$

$\Rightarrow Q \geq 0$ $\forall x, y, z$ thuộc (0; 1). Dấu đẳng thức có khi và chỉ khi $x=y=z=\frac{1}{3}$

$\Rightarrow \min Q = \frac{3\sqrt{3}}{2}$

Lời bình

Bạn đọc đặt câu hỏi số $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ đến từ đâu và tại sao xét hiệu $Q-\frac{3\sqrt{3}}{2}$?

Trả lời: Do tính bình đẳng của các biến nên ta dự đoán minQ đạt được khi

$x = y = z = \frac{1}{\sqrt{3}}$ hay minQ= $Q\left(\frac{1}{\sqrt{3}};\frac{1}{\sqrt{3}};\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

Với mọi k ta có $Q - k = Q - k(x^2+y^2+z^2)$

$$= \frac{x}{1-x^2} + \frac{y}{1-y^2} + \frac{z}{1-z^2} - k(x^2+y^2+z^2)$$

$$= \left(\frac{x}{1-x^2} - kx^2\right) + \left(\frac{y}{1-y^2} - ky^2\right) + \left(\frac{z}{1-z^2} - kz^2\right)$$

• *$k = \min Q \Rightarrow k - Q\left(\frac{1}{\sqrt{3}};\frac{1}{\sqrt{3}};\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = 0 \Leftrightarrow \frac{\frac{1}{\sqrt{3}}}{1-\frac{1}{3}} = \frac{k}{3} \Leftrightarrow k = \frac{3\sqrt{3}}{2}$*

Với $k=\frac{3\sqrt{3}}{2}$, ta có $\frac{x}{1-x^2} - \frac{3\sqrt{3}}{2}x^2 = \frac{2+\sqrt{3}x}{1-x^2}\left(x - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 \geq 0$ $\forall x \in (0; 1)$

Cách 2. Tiếp nối cách 1 từ (1)

Theo Cô si : $2x^2 + (1-x^2) + (1-x^2) \geq 3\sqrt[3]{2x^2(1-x^2)^2} \Leftrightarrow \frac{2}{3} \geq \sqrt[3]{2x^2(1-x^2)^2}$

$\Leftrightarrow \frac{8}{27} \geq 2x^2(1-x^2)^2 \Leftrightarrow x(1-x^2) \leq \frac{2}{3\sqrt{3}} \Leftrightarrow \frac{1}{x(1-x^2)} \geq \frac{3\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \frac{x}{1-x^2} \geq \frac{3\sqrt{3}}{2}x^2$

Dấu đẳng thức có khi và chỉ khi $2x^2 = 1 - x^2 \Leftrightarrow x = \frac{1}{\sqrt{3}}$

Cũng vậy : $\frac{y}{1-y^2} \geq \frac{3\sqrt{3}}{2}y^2$, $\frac{z}{1-z^2} \geq \frac{3\sqrt{3}}{2}z^2$

$\Rightarrow Q \geq \frac{3\sqrt{3}}{2}(x^2+y^2+z^2) = \frac{3\sqrt{3}}{2}$

Dấu đẳng thức có khi và chỉ khi $x = y = z = \frac{1}{\sqrt{3}}$. Vậy $\min Q = \frac{3\sqrt{3}}{2}$.

Thí dụ 22

Cho bốn số thực dương a, b, x, y, z (a, b không đổi).

Tìm GTNN của biểu thức Q khi x, y, z biến thiên, với

$$Q = \frac{x^2}{(ay + bz)(az + by)} + \frac{y^2}{(az + bx)(ax + bz)} + \frac{z^2}{(ax + by)(ay + bx)}$$

Lời giải

Ta có $(ay + bz)(az + by) = ab(y^2 + z^2) + (a^2+b^2)yz \leq ab(y^2+z^2) + \frac{1}{2}(a^2+b^2)(y^2+z^2)$

Tóm lại $(ay + bz)(az + by) \leq \frac{1}{2}(a + b)^2(y^2 + z^2)$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{(ay + bz)(az + by)} \geq \frac{2x^2}{(a + b)^2(y^2 + z^2)}.$$

Dấu đẳng thức có khi và chỉ khi x = y

Tương tự $\frac{y^2}{(az + bx)(ax + bz)} \geq \frac{2y^2}{(a + b)^2(z^2 + x^2)}$;

$$\frac{z^2}{(ax + by)(ay + bx)} \geq \frac{2z^2}{(a + b)^2(x^2 + y^2)}$$

Cộng vế theo vế các bất đẳng thức trên ta có

$$Q \geq \frac{2}{(a + b)^2}\left(\frac{x^2}{y^2 + z^2} + \frac{y^2}{z^2 + x^2} + \frac{z^2}{x^2 + y^2}\right)$$

Theo Nestbit: Với ∀a, b, c dương luôn có $\frac{a}{b + c} + \frac{b}{c + a} + \frac{c}{a + b} \geq \frac{3}{2}$, suy ra :

$Q \geq \frac{3}{(a + b)^2}$. Dấu đẳng thức có khi và chỉ khi x = y = z. Vậy Min Q= $\frac{3}{(a + b)^2}$.

Thí dụ 23. (Đề dự bị Olympic Quốc tế –1993, **Mỹ** đề nghị)

Cho bốn số thực dương thay đổi x, y, z, t. Tìm GTNN của biểu thức

$$Q = \frac{x}{y + 2z + 3t} + \frac{y}{z + 2t + 3x} + \frac{z}{t + 2x + 3y} + \frac{t}{x + 2y + 3z} \quad (1)$$

Lời giải

Cách 1: Viết lại

$$(1) \Leftrightarrow Q = \frac{x^2}{xy + 2xz + 3xt} + \frac{y^2}{yz + 2yt + 3yx} + \frac{z^2}{zt + 2zx + 3zy} + \frac{t^2}{tx + 2ty + t3z}$$

Theo Svacxơ ta có : $Q \geq \frac{(x + y + z + t)^2}{4(xy + xz + xt + yz + yt + zt)}$

$$\Rightarrow Q - \frac{2}{3} \geq \frac{(x + y + z + t)^2}{4(xy + xz + xt + yz + yt + zt)} - \frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow Q-\frac{2}{3}\geq\frac{\left[(x-y)^2+(y-z)^2+(z-t)^2+(t-x)^2\right]}{12(xy+xz+xt+yz+yt+zt)}\geq 0\Rightarrow Q\geq\frac{2}{3}.$$

Dấu đẳng thức có khi và chỉ khi $x = y = z = t$. Vậy $\min Q=\frac{2}{3}$.

Lời bình.

Do tính bình đẳng của các biến nên ta dự đoán GTNN biểu thức đạt được khi $x=y=z=t\Rightarrow Q=\frac{2}{3}$. Điều đó giải thích sự hiện hữu của số $\frac{2}{3}$ trong quá trình đi tìm chân trị của minQ.

Cách 2 : Đặt
$$\begin{cases}y+2z+3t=a>0\\ z+2t+3x=b>0\\ t+2x+3y=c>0\\ y+2y+3z=d>0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=\dfrac{7b+c+d-5a}{24}\\ y=\dfrac{7c+d+a-5b}{24}\\ z=\dfrac{7d+a+b-5c}{24}\\ t=\dfrac{7a+b+c-5d}{24}\end{cases}$$

Biểu thức Q trở thành :

$$Q=\frac{7b+c+d-5a}{24a}+\frac{7c+d+a-5b}{24b}+\frac{7d+a+b-5c}{24c}+\frac{7a+b+c-d}{24d}$$

$$=-\frac{5}{6}+\frac{7}{24}\left(\frac{b}{a}+\frac{c}{b}+\frac{d}{c}+\frac{a}{d}\right)+\frac{1}{24}\left(\frac{c}{a}+\frac{d}{a}+\frac{d}{b}+\frac{a}{b}+\frac{a}{c}+\frac{b}{c}+\frac{b}{d}+\frac{c}{d}\right)$$

$$\geq-\frac{5}{6}+\frac{7.4}{24}\sqrt[4]{\frac{bcda}{abcd}}+\frac{1.8}{24}\sqrt[4]{\frac{(bcda)^2}{(abcd)^2}}=-\frac{5}{6}+\frac{7}{6}+\frac{1}{3}=\frac{2}{3}\Rightarrow Q\geq\frac{2}{3}$$

Dấu đẳng thức có khi và chỉ khi $a = b = c = d \Leftrightarrow x = y = z = t$. Vậy $\min Q=\frac{2}{3}$.

Thí dụ 24

Cho x, y, z là các số thực dương thoả mãn $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

Tìm GTNN của biểu thức $Q=\dfrac{x^3}{2x+3y+4z}+\dfrac{y^3}{2y+3z+4x}+\dfrac{z^3}{2z+3x+4y}$

Lời giải

Viết lại $Q=\dfrac{x^4}{x(2x+3y+4z)}+\dfrac{y^4}{y(2y+3z+4x)}+\dfrac{z^4}{z(2z+3x+4y)}$

Theo Svacxơ suy ra : $Q\geq\dfrac{(x^2+y^2+z^2)^2}{x(2x+3y+4z)+y(2y+3z+4x)+z(2z+3x+4y)}$

$$\Leftrightarrow Q\geq\frac{(x^2+y^2+z^2)^2}{2(x^2+y^2+z^2)+7(xy+yz+zx)}\qquad(1)$$

Theo Bunhiacopski $(xy + yz + zx) \le x^2 + y^2 + z^2$ nên từ (1) suy ra :

$$Q \ge \frac{(x^2+y^2+z^2)^2}{2(x^2+y^2+z^2)+7(x^2+y^2+z^2)} = \frac{1}{9}(x^2+y^2+z^2) = \frac{1}{9} \Rightarrow Q \ge \frac{1}{9}$$

Dấu đẳng thức trong hai lần đánh giá trên đồng thời xảy ra $\Leftrightarrow x = y = z = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Vậy $\min Q = \frac{1}{9}$

Lời bình. *Ta có kết quả với bài toán rộng hơn.*

> **Bài toán.**
> Cho M, a, b, c là các số thực dương cho trước và x, y, z là các số thực dương thoả mãn $x^2 + y^2 + z^2 \ge M$. Tìm GTNN của biểu thức :
>
> $$Q = \frac{x^3}{ax+by+cz} + \frac{y^3}{ay+bz+cx} + \frac{z^3}{az+bx+cy}$$

Lời giải

Viết lại $Q = \frac{x^4}{x(ax+by+cz)} + \frac{y^4}{y(ay+bz+cx)} + \frac{z^4}{z(az+bx+cy)}$

Theo Svacxơ suy ra $Q \ge \frac{(x^2+y^2+z^2)^2}{x(ax+by+cz)+y(ay+bz+cx)+z(az+bx+cy)}$

$$\Leftrightarrow Q \ge \frac{(x^2+y^2+z^2)^2}{a(x^2+y^2+z^2)+(b+c)(xy+yz+zx)} \quad (1)$$

Theo Bunhiacopski: $(xy+yz+zx) \le x^2+y^2+z^2$ nên từ (1) suy ra

$$Q \ge \frac{(x^2+y^2+z^2)^2}{a(x^2+y^2+z^2)+(b+c)(x^2+y^2+z^2)} = \frac{x^2+y^2+z^2}{a+b+c} = \frac{M}{a+b+c}$$

Dấu đẳng thức trong hai lần đánh giá trên đồng thời xảy ra $\Leftrightarrow x=y=z=\sqrt{\frac{M}{3}}$

Vậy $\min Q = \frac{M}{a+b+c}$

Với $M = 1, a = 2, b = 3, c = 4$ ta có $\min Q = \frac{1}{9}$.

> **Thí dụ 25.**
> Cho x, y, z là các số thực thuộc [0; 1]. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức
>
> $$Q = \frac{x}{y+z+1} + \frac{y}{x+z+1} + \frac{z}{y+x+1} + (1-x)(1-y)(1-z)$$

Lời giải

Không mất tính tổng quát, giả sử $x = \max\{x; y; z\}$ sẽ có

$$\frac{z}{y+x+1} \le \frac{z}{y+z+1}, \quad (*)$$

$$\frac{y}{x+z+1} \le \frac{y}{y+z+1}, \qquad (*)$$

$$\frac{x}{y+z+1} = \frac{x}{y+z+1},$$

Cộng theo từng vế có: $\frac{x}{y+z+1} + \frac{y}{x+z+1} + \frac{z}{y+x+1} \le \frac{x+y+z}{y+z+1} = 1 + \frac{x-1}{y+z+1}$

$$\text{Hay } \; Q \le 1 + \frac{x-1}{y+z+1} + (1-x)(1-y)(1-z)$$

$$\Leftrightarrow Q \le 1 + (1-x)\,\frac{(1-y)(1-z)(y+z+1)-1}{y+z+1}$$

Theo Cô–si : $(1-y)(1-z)(y+z+1) \le \left(\frac{1-y+1-z+y+z+1}{3}\right)^3 = 1$

$$\Rightarrow (1-x)\,\frac{(1-y)(1-z)(y+z+1)-1}{y+z+1} \le \frac{1-1}{y+z+1} = 0 \;\Rightarrow\; Q \le 1$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} 1-x=0 \\ 1-y=1-z=y+z+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=z=0 \end{cases}$

Vậy MaxQ = 1, đạt được khi trong 3 số x; y; z có 1 số bằng 1, còn 2 số còn lại bằng 0.

Chú ý: *Các phép biến đổi ở (*) được gọi là cách đánh giá trội.*
Chúng ta còn gặp cách này trong một số thí dụ ở sau.

Thí dụ 26
Cho x, y, z là các số thực thay đổi có $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.
Tìm GTNN và GTLN của biểu thức $Q = x + y + z + xy + yz + zx$

Lời giải

1) *Giá trị nhỏ nhất của Q:*

Để ý : $(x + y + z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy+yz+zx) \Rightarrow (x + y + z)^2 = 1 + 2(xy+yz+zx)$

Đặt $t = x + y + z$, $|t| \le \sqrt{3}$, ta có $xy + yz + zx = \frac{t^2-1}{2}$ và $Q = t + \frac{t^2-1}{2} = \frac{(t+1)^2}{2} - 1$

$\Rightarrow Q \ge -1$, dấu đẳng thức có khi và chỉ khi $t = -1$ (thích hợp)

Vậy $\min Q = -1$

2) *Giá trị lớn nhất của Q*

Theo Bunhiacopski ta có: • $x + y + z \le \sqrt{(1^2+1^2+1^2)(x^2+y^2+z^2)} = \sqrt{3}$ (1)

• $xy + yz + zx \le x^2 + y^2 + z^2 = 1$ (2)

Từ (1), (2) suy ra $Q \le 1 + \sqrt{3}$, dấu đẳng thức có khi và chỉ khi $x = y = z = \frac{1}{\sqrt{3}}$

Vậy $\max Q = 1 + \sqrt{3}$.

Thí dụ 27. (ĐH Xây dựng, năm học 2001-2002)
Tìm GTNN của $Q = \cos(x^2 + y^2 + z^2)$, trong đó x, y, z là ba số dương thay đổi trên [0; 1] và thoả mãn $x + y + z = \frac{3}{2}$ (1)

Lời giải

Đặt $t = x^2 + y^2 + z^2$. Biểu thức trở thành Q = cost.
Trước hết ta tìm tập xác định của Q, tức là tập giá trị của biểu thức t.

a) Giá trị nhỏ nhất của t.

Theo Bunhiacopski: $(1^2 + 1^2 + 1^2)(x^2 + y^2 + z^2) \geq (x + y + z)^2 = \frac{9}{4} \Rightarrow t \geq \frac{3}{4} > 0$ (2)

b) Giá trị lớn nhất của t.

Gọi P = xy + yz + zx. Ta có $\frac{9}{4} = (x + y + z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + yz + zx)$

$\Leftrightarrow t = \frac{9}{4} - 2P$

Ta đi tìm GTLN của P.

Không mất tính tổng quát, ta giả sử $x \geq y \geq z > 0$, từ giả thiết suy ra $x \in [\frac{1}{2}; 1]$

Gọi $P = xy + yz + zx = yz + x(y + z) = yz + x(\frac{3}{2} - x) = yz + (\frac{3}{2}x - x^2)$

Để ý: Xem hàm số $f(x) = \frac{3}{2}x - x^2$. Ta có $f(\frac{1}{2}) = f(1) = \frac{1}{2}$, hệ số của x^2 bằng $-1 < 0$

suy ra $\min\limits_{[\frac{1}{2};1]} f(x) = f(\frac{1}{2}) = f(1) = \frac{1}{2} \Rightarrow P \geq yz + \frac{1}{2} \geq \frac{1}{2}$,

dấu đẳng thức có khi và chỉ khi $\begin{cases} x = 0 \text{ hoặc } x = 1 \\ yz = 0 \end{cases} \Rightarrow t \leq \frac{9}{4} - 1 = \frac{5}{4} < \pi$ (3)

Kết hợp với $x + y + z = \frac{3}{2} \Rightarrow$ dấu đẳng thức có khi và chỉ khi trong 3 số x; y; z có một số là 1, một số là $\frac{1}{2}$, số còn lại là số 0.

Từ (2) và (3) suy ra Q có tập xác định là: $t \in \left[\frac{3}{4}; \frac{5}{4}\right] \subset [0; \pi]$

Trên $\left[\frac{3}{4}; \frac{5}{4}\right]$, Q = cost là hàm số nghịch biến $\Rightarrow \min Q = Q(\frac{5}{4}) = \cos\frac{5}{4}$

Thí dụ 28
1) Chứng minh với mọi x, y, z không âm luôn có:
$$xyz \geq (x + y - z)(x + z - y)(y + z - x) \quad (1)$$
2) Cho a là số cố định, x, y, z là các số thực không âm có x + y + z = 1
Tìm GTNN và GTLN của biểu thức Q = xy + yz + zx − axyz

Lời giải

1. Để ý : Với x, y, z không âm thì trong ba số $a = (y + z - x)$, $b = (x + z - y)$, $c = (x + y - z)$ không thể có quá một số âm.

Giả sử có hai số âm, do tính tính bình đẳng của x, y, z, ta giả sử $\begin{cases} x + y - z < 0 \\ x - y + z < 0 \end{cases}$

Cộng vế theo vế ta có $2x < 0$, trái giả thiết $x \ge 0$

+ Nếu trong ba số a, b, c có một số âm thì (1) đúng (do $xyz \ge 0 \ge abc$) (2)

+ Nếu cả ba số đều dương thì ta có $x^2 \ge x^2 - (y - z)^2 = (x + y - z)(x + z - y) > 0$.

Tương tự $y^2 \ge (x + y - z)(y + z - x)$, $z^2 \ge (x + z - y)(y + z - x)$

Do vậy, nhân vế theo vế có $\Leftrightarrow (xyz)^2 \ge (x + y - z)^2(x + z - y)^2(y + z - x)^2$

$\Leftrightarrow xyz \ge (x + y - z)(x + z - y)(y + z - x)$ (3)

Từ (2), (3) suy ra (1) được chứng minh.

2.

1) Giá trị lớn nhất của Q.

Sử dụng $xyz \ge (x + y - z)(x + z - y)(y + z - x)$ kết hợp với $x + y + z = 1$ ta có

(1) $\Leftrightarrow xyz \ge (1 - 2x)(1 - 2y)(1 - 2z) = 1 - 2(x + y + z) + 4(xy + yz + zx) - 8xyz$

$\Rightarrow xy + yz + zx \le \dfrac{9xyz}{4} + \dfrac{1}{4}$. Suy ra $Q \le \dfrac{1}{4} + \left(\dfrac{9}{4} - a\right)xyz$. (4)

Chú ý :

$0 \le xyz \le \left(\dfrac{x + y + z}{3}\right)^3 = \dfrac{1}{27}$, dấu đẳng thức có khi và chỉ khi $x = y = z = \dfrac{1}{3}$ (5)

Do vậy, xét a:

- $a \le \dfrac{9}{4}$, từ (4), (5) suy ra $Q \le \dfrac{1}{4} + \left(\dfrac{9}{4} - a\right)\dfrac{1}{27} = \dfrac{9 - a}{27}$. Đạt được khi $x=y=z=\dfrac{1}{3}$

  $\Rightarrow \text{Max}Q = \dfrac{9 - a}{27}$ (6)

- $a > \dfrac{9}{4}$, từ (4) suy ra $Q \le \dfrac{1}{4}$.

  Với $x=y=\dfrac{1}{2}$, $z = 0$ thì $Q=\dfrac{1}{4}$, suy ra $\max Q=\dfrac{1}{4}$ (7)

2) Giá trị nhỏ nhất của Q.

Với $xyz > 0$, theo Cô-si ta có $(x + y + z)\left(\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z}\right) \ge 3\sqrt[3]{xyz}\cdot\dfrac{3}{\sqrt[3]{xyz}} = 9$

Kết hợp với $x + y + z = 1$ ta có:

$$xy + yz + zx = xyz\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) = xyz(x + y + z)\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) \ge 9xyz$$

Hiển nhiên $xy + yz + zx \ge 9xyz$ đúng cả trong trường hợp $xyz = 0$

Suy ra $Q \ge (9 - a)xyz$, $(\forall xyz : x + y + z = 1)$ (8)

Do vậy trị số của minQ còn tuỳ thuộc vào dấu của $9 - a$.

• $a > 9$: Từ (5), (8) ta có $Q \geq \frac{9-a}{27}$ Dấu đẳng thức có khi và chỉ khi $x=y=z=\frac{1}{3}$

$\Rightarrow MinQ = \frac{9-a}{27}$ (9)

• $a < 9$: Từ (8) suy ra $Q > 0$. Với $x = y = 0$, $z = 1$ có $Q = 0 \Rightarrow MinQ = 0$

Tóm lại : $MaxQ = \begin{cases} \frac{9-a}{27} & \text{nếu } a < \frac{9}{27} \\ \frac{1}{4} & \text{nếu } a \geq \frac{9}{27} \end{cases}$ và $MinQ = \begin{cases} 0 & \text{nếu } a < 9 \\ \frac{9-a}{27} & \text{nếu } a > 9 \end{cases}$

Chẳng hạn

Với $a = 10$ ta có $0 < Q \leq \frac{1}{4}$

Với $a = 2$ ta có $0 < Q \leq \frac{7}{27}$. (Vô địch toán Quốc tế, 1984–CHLB Đức)

Chú ý: *Bất đẳng thức (1) là một ước lượng đáng nhớ. Chúng ta còn gặp lại nó trong một số thí dụ về sau.*

Thí dụ 29. (ĐH Vinh, khối A+B, năm học 2001-2002)
Cho a, b, c là 3 cạnh của tam giác có chu vi bằng 3. Chứng minh

$$Q = 3a^2 + 3b^2 + 3c^2 + 4abc \geq 13 \quad (1)$$

Lời giải

Trước hết : có hai nhận xét sau đây

1) Với mọi a, b, c luôn có $ab + bc + ca \leq a^2 + b^2 + c^2$

$\Leftrightarrow 3(ab + bc + ca) \leq (a + b + c)^2$ (2)

Kết hợp với $a + b + c = 3$ có (2) $\Leftrightarrow ab + bc + ca \leq 3$

$\Rightarrow -\frac{2}{3}(ab + bc + ca) \geq -2$ (3)

2) Theo kết quả thí dụ 28 ở trên suy ra trong mọi ΔABC luôn có

$abc \geq (a + b - c)(a + c - b)(b + c - a)$. Kết hợp với $a + b + c = 3$ ta có

$abc \geq (3 - 2a)(3 - 2b)(3 - 2c) = 27 - 18(a + b + c) + 12(ab + bc + ca) - 8abc$

$\Rightarrow 9abc \geq 27 - 18.3 + 12(ab + bc + ca) \Rightarrow 4abc \geq -12 + \frac{16}{3}(ab + bc + ca)$

Suy ra $Q \geq 3a^2 + 3b^2 + 3c^2 - 12 + \frac{16}{3}(ab + bc + ca)$

$= 3[(a + b + c)^2 - 2(ab + bc + ca)] - 12 + \frac{16}{3}(ab + bc + ca)$

$= 3[3^2 - 2(ab + bc + ca)] - 12 + \frac{16}{3}(ab + bc + ca) = 27 - 12 - \frac{2}{3}(ab + bc + ca)$

$= 15 - \frac{2}{3}(ab + bc + ca)$ (4)

Thay vào (2) vào (4) có $Q \geq 15 - 2 = 13$. Khi và chỉ khi $x = y = z = 1$ thì tất cả các bất đẳng thức trong các bất đẳng thức trên đều cân bằng.

Bởi vậy Q=13 là GTNN của Q.

Thí dụ 30. (Vô địch Quốc tế, năm 2000)

Cho a, b, c là ba số dương thoả mãn abc = 1. Chứng minh

$$Q = (a + \frac{1}{b} - 1)(b + \frac{1}{c} - 1)(c + \frac{1}{a} - 1) \leq 1$$

Lời giải

Sử dụng bất đẳng thức $xyz \geq (x + y - z)(x + z - y)(y + z - x)$ (*thí dụ 28*) cho ba số thực dương $x=a$, $y=\frac{1}{b}$, $z = 1$ ta có $\frac{a}{b} \geq (a + \frac{1}{b} - 1).(a + 1 - \frac{1}{b}).(\frac{1}{b} + 1 - a)$ (1)

Nhân theo từng vế của bất đẳng thức (1) với $\frac{b}{a} > 0$ ta có

$$(1) \Leftrightarrow 1 \geq (a + \frac{1}{b} - 1)b(a+1-\frac{1}{b})\frac{1}{a}(\frac{1}{b}+1-a)$$

$$\Leftrightarrow 1 \geq (a + \frac{1}{b} - 1).(ab + b - 1)(\frac{1}{ab} + \frac{1}{a} - 1) \qquad (2)$$

Theo giả thiết $abc = 1 \Leftrightarrow ab = \frac{1}{c}$, thay vào (2) có : $1 \geq (a+\frac{1}{b} - 1).(\frac{1}{c} + b - 1).(c + \frac{1}{a} - 1)$

$\Rightarrow Q \leq 1$. Dấu đẳng thức có khi và chỉ khi $\begin{cases} x = y = z \\ abc = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{b} = 1 \\ abc = 1 \end{cases} \Leftrightarrow a = b = c = 1$

Thí dụ 31

Cho ba số thực x, y, z thoả mãn các điều kiện :

$$0 < x < y \leq z \leq 1 \text{ và } 3x + 2y + z \leq 4 \qquad (1)$$

Tìm maxQ, với $Q = 3x^2 + 2y^2 + z^2$

Lời giải.

Cách 1: Từ giả thiết $\begin{cases} 0 < x < y \leq z \leq 1 \\ 3x + 2y + z \leq 4 \end{cases}$ suy ra $\begin{cases} 0 < 6x \leq 4 \\ 0 < y \leq z \leq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 \leq x \leq \frac{2}{3} \\ y^2 \leq y \leq 1 \\ z^2 \leq z \leq 1 \end{cases}$ (2)

Trường hợp 1: $0 < x \leq \frac{1}{3} \Rightarrow x^2 \leq \frac{1}{9} \Rightarrow 3x^2 + 2y^2 + z^2 < \frac{1}{3} + 2 + 1 = \frac{10}{3} \Rightarrow Q < \frac{10}{3}$.

Trường hợp 2: $\frac{1}{3} < x \leq \frac{2}{3} \Rightarrow (x - \frac{1}{3})(x - \frac{2}{3}) \leq 0 \Leftrightarrow x^2 \leq x - \frac{2}{9}$ (3)

Từ (1), (2), (3) suy ra $0 < Q \leq 3(x - \frac{2}{9}) + 2y + z = 3x + 2y + z - \frac{2}{3} \leq 4 - \frac{2}{3} = \frac{10}{3}$

$\Rightarrow 0 < Q \le \dfrac{10}{3}$

Trong cả hai trường hợp, dấu đẳng thức có khi $\{x=\dfrac{1}{3}, y=z=1\}$, thỏa mãn (1)

Vậy $\max Q=\dfrac{10}{3}$

Cách 2. Từ giả thiết ta có :

$$\begin{cases}0 < x \le y \le z \le 1\\ 3x+2y+z \le 4\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}2y(y-x) \le 2(y-x)\\ z(z-x) \le z-x\\ 3x^2+2xy+xz \le 4x\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}2y^2-2xy \le 2y-2x & (1)\\ z^2-xz \le z-x & (2)\\ 3x^2+2xy+xz \le 4x & (3)\end{cases}$$

Cộng theo từng vế các bất đẳng thức (1), (2), (3) ta có

$$3x^2+2y^2+z^2 \le x+2y+z \text{ hay } Q \le \frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{3}x+\sqrt{2}\sqrt{2}y+1.1z \qquad (4)$$

Áp dụng Bunhiacopski vào vế phải của (4) có $Q^2 \le (\dfrac{1}{3}+2+1)(3x^2+2y^2+z^2)$

hay $Q^2 \le \dfrac{10}{3}Q \Rightarrow Q \le \dfrac{10}{3}$ (do $Q>0$). Dấu đẳng thức có khi $\{x=\dfrac{1}{3}; y=z=1\}$.

Vậy $\max Q=\dfrac{10}{3}$.

Thí dụ 32. (Đề dự thi Quốc tế lần thứ 37 năm 1996)
Cho ba số dương a, b, c thoả mãn $abc=1$. Chứng minh

$$Q=\frac{ab}{a^5+b^5+ab}+\frac{bc}{b^5+c^5+bc}+\frac{ca}{c^5+a^5+ca}\le 1$$

Lời giải

Với mọi $a, b>0$ ta có: $(a^3-b^3)(a^2-b^2)\ge 0 \Leftrightarrow a^5+b^5\ge a^2b^2(a+b)$

$$\Leftrightarrow a^5+b^5+ab \ge ab[ab(a+b)+1]$$

$$\Leftrightarrow \frac{ab}{a^5+b^5+ab}\le\frac{1}{ab(a+b)+1}=\frac{c}{a+b+c} \quad (\text{do } abc=1)$$

Tương tự $\dfrac{bc}{b^5+c^5+bc}\le\dfrac{a}{a+b+c}$, $\dfrac{ca}{c^5+a^5+ca}\le\dfrac{b}{a+b+c}$

Cộng các bất đẳng thức cùng chiều trên ta có $Q\le\dfrac{a+b+c}{a+b+c}=1$

Dấu đẳng thức trong tất cả các phép biến đổi trên đồng thời xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$ (đpcm)

Thí dụ 33

Tìm GTLN của biểu thức $Q=\frac{\cos^2 x}{a}+\frac{\sin^2 y}{b}$, trong đó

$$\begin{cases} \bullet \text{ a, b, c là các số thực dương, } c \le \min\left\{\frac{a^3+b^3}{a^2}, \frac{a^3+b^3}{b^2}\right\} \\ \bullet \text{ x, y là nghiệm của phương trình } a\sin x + b\cos y = c. \end{cases}$$

Lời giải

Viết lại $Q=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}-\left(\frac{\sin^2 x}{a}+\frac{\cos^2 y}{b}\right)=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}-\left(\frac{(a\sin x)^2}{a^3}+\frac{(b\cos y)^2}{b^3}\right)$

Do a > 0, b >0 nên theo Svacxơ :

$$\frac{(a\sin x)^2}{a^3}+\frac{(b\cos y)^2}{b^3} \ge \frac{(a\sin x+b\cos y)^2}{a^3+b^3}=\frac{c^2}{a^3+b^3}$$

$\Rightarrow Q \le \frac{1}{a}+\frac{1}{b}-\frac{c^2}{a^3+b^3}$

Dấu đẳng thức có khi và chỉ khi $\begin{cases} \frac{\sin x}{a^2}=\frac{\cos y}{b^2} \\ a\sin x+b\cos y=c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x=\frac{a^2c}{a^3+b^3} \\ \cos y=\frac{b^2c}{a^3+b^3} \end{cases}$ (1)

Với các điều kiện a, b, c>0, $c \le \min\left\{\frac{a^3+b^3}{a^2}, \frac{a^3+b^3}{b^2}\right\} \Rightarrow 0 < \frac{a^2c}{a^3+b^3} \le 1$ và

$0 < \frac{b^2c}{a^3+b^3} \le 1 \Rightarrow$ Hệ (1) có nghiệm hay tồn tại cặp $(x_0; y_0)$ là *chân trị* của Q.

Vậy $\max Q=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}-\frac{c^2}{a^3+b^3}$

Thí dụ 34

Gọi a, b, c là độ dài các cạnh của ΔABC. Tìm GTNN của biểu thức

$$Q=\frac{aA+bB+cC}{a+b+c}$$

Lời giải

Với mọi ΔABC luôn có $(a-b)(A-B) \ge 0 \Leftrightarrow aA+bB-aB-bA \ge 0$

Tương tự $bB+cC-bC-cB$, $cC+aA-cA-aC \ge 0$

Cộng ba bất đẳng thức cùng chiều trên ta có

$$a(2A-B-C)+b(2B-C-A)+c(2C-A-B) \ge 0$$

$\Leftrightarrow a[3A-(A+B+C)]+b[3B-(A+B+C)]+c[3C-(A+B+C)] \ge 0$

$\Leftrightarrow a(3A-\pi)+b(3B-\pi)+c(3C-\pi) \ge 0 \Leftrightarrow 3(aA+bB+cC) \ge \pi(a+b+c)$

$<=> \dfrac{aA + bB + cC}{a + b + c} \geq \dfrac{\pi}{3}$. Dấu đẳng thức trong các bất đẳng thức trên đồng thời xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c <=> \Delta ABC$ đều. Vậy $\min Q = \dfrac{\pi}{3}$

Lời bình. *Do tính bình đẳng của a, b, c do vậy dự đoán chân trị của Q có trị số chung* $a = b = c \Rightarrow Q = \dfrac{\pi}{3}$. *Vì lẽ đó, xét hiệu* $Q - \dfrac{\pi}{3}$ *bạn cũng đi tới kết quả.*

Thí dụ 35

Cho x, y, z là ba số dương và $xyz \leq a$ (a là hằng số dương). Tìm min Q, với

$$Q = (1 + x)(1 + y)(1 + z)$$

Lời giải

Biến đổi $Q = 1 + (x + y + z) + (xy + yz + zx) + xyz$

Theo bất đẳng thức Cô-si : $x + y + z \geq 3\sqrt[3]{xyz}$; $xy + yz + zx \geq 3\sqrt[3]{(xyz)^2}$

Suy ra $Q \geq 1 + 3\sqrt[3]{xyz} + 3\sqrt[3]{(xyz)^2} + xyz = \left(1 + \sqrt[3]{xyz}\right)^3 = (1 + \sqrt[3]{a})^3$

Dấu đẳng thức có khi và chỉ khi $\begin{cases} x = y = z \\ xyz = a \end{cases} <=> x = y = z = \sqrt[3]{a}$

Vậy $\min Q = (1 + \sqrt[3]{a})^3$.

Thí dụ 36. (Olympic 30-4, lần 8)

1) Cho $a_1, a_2, \ldots, a_n; b_1, b_2, \ldots, b_n$ là các số dương. **Chứng minh**

$$\sqrt[n]{(a_1 + b_1)(a_2 + b_2)\ldots(a_n + b_n)} \geq \sqrt[n]{a_1a_2\ldots a_n} + \sqrt[n]{b_1b_2\ldots b_n}$$

2) Tìm GTLN của $Q = \dfrac{\left(x^2 + 1\right)^3}{\left(x^2 + \frac{1}{2}\right)\left(x^2 + \frac{1}{3}\right)\left(x^2 + 3!\right)}$, **với** $x \in R$

Lời giải

1) Theo bất đẳng thức Cô-si :

$$\frac{a_1}{a_1 + b_1} + \frac{a_2}{a_2 + b_2} + \ldots + \frac{a_n}{a_n + b_n} \geq n\sqrt[n]{\frac{a_1a_2\ldots a_n}{(a_1 + b_1)(a_2 + b_2)\ldots(a_n + b_n)}}$$

$$\frac{b_1}{a_1 + b_1} + \frac{b_2}{a_2 + b_2} + \ldots + \frac{b_n}{a_n + b_n} \geq n\sqrt[n]{\frac{b_1b_2\ldots b_n}{(a_1 + b_1)(a_2 + b_2)\ldots(a_n + b_n)}}$$

Cộng theo từng vế có :

$$n \geq n.\left(\sqrt[n]{\frac{a_1a_2\ldots a_n}{(a_1 + b_1)(a_2 + b_2)\ldots(a_n + b_n)}} + \sqrt[n]{\frac{b_1b_2\ldots b_n}{(a_1 + b_1)(a_2 + b_2)\ldots(a_n + b_n)}}\right)$$

$<=> \sqrt[n]{(a_1 + b_1)(a_2 + b_2)\ldots(a_n + b_n)} \geq \sqrt[n]{a_1a_2\ldots a_n} + \sqrt[n]{b_1b_2\ldots b_n} <=> Q \leq 1$

Dấu đẳng thức có khi và chỉ khi :

$$\frac{a_1}{a_1+b_1}=\frac{a_2}{a_2+b_2}=...=\frac{a_n}{a_n+b_n}=t\ \left(=\frac{a_1+a_2+...+a_n}{(a_1+b_1)+(a_2+b_2)+...+(a_n+b_n)}\right)$$

$$\frac{b_1}{a_1+b_1}=\frac{b_2}{a_2+b_2}=...=\frac{b_n}{a_n+b_n}=k\ \left(=\frac{b_1+b_2+...+b_n}{(a_1+b_1)+(a_2+b_2)+...+(a_n+b_n)}\right)$$

$$\Leftrightarrow\ \frac{a_i}{b_i}=\frac{t}{1-t}\quad \forall i=1,2,...,n\ (\text{do } k+t=1) \Leftrightarrow \frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=...=\frac{a_n}{b_n}\ (\text{dpcm})$$

2) Sử dụng (1) với $a_1=a_2=a_3=x^2$; $b_1=\frac{1}{2}$; $b_2=\frac{1}{3}$; $b_3=3!$

Ta có $x^2+1\le\sqrt[3]{(x^2+\frac{1}{2})(x^2+\frac{1}{3})(x^2+3!)}\ \Rightarrow Q\le 1.$

Dấu đẳng thức có khi $\frac{x^2}{\frac{1}{2}}=\frac{x^2}{\frac{1}{3}}=\frac{x^2}{3!}\Leftrightarrow x=0$ **Vậy Max Q=1**

Thí dụ 37. (Olympic Quốc tế lần thứ 42, 2001)
Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}}+\frac{b}{\sqrt{b^2+8ca}}+\frac{c}{\sqrt{c^2+8ab}}\ge 1 \qquad (1)$$

Lời giải

Cách 1. Trước hết ta có nhận xét với mọi a, b, c dương luôn có

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}}\ge\frac{a^{\frac{4}{3}}}{a^{\frac{4}{3}}+b^{\frac{4}{3}}+c^{\frac{4}{3}}} \qquad (2)$$

Ta có : $(a^{\frac{4}{3}}+b^{\frac{4}{3}}+c^{\frac{4}{3}})^2-(a^{\frac{4}{3}})^2=(b^{\frac{4}{3}}+c^{\frac{4}{3}})(a^{\frac{4}{3}}+a^{\frac{4}{3}}+b^{\frac{4}{3}}+c^{\frac{4}{3}})$

$\ge 2b^{\frac{2}{3}}c^{\frac{2}{3}}.4a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{1}{3}}c^{\frac{1}{3}}=8a^{\frac{2}{3}}bc$

$\Rightarrow (a^{\frac{4}{3}}+b^{\frac{4}{3}}+c^{\frac{4}{3}})^2\ge(a^{\frac{4}{3}})^2+8a^{\frac{2}{3}}bc=a^{\frac{2}{3}}(a^2+8bc)$

$\Rightarrow a^{\frac{4}{3}}+b^{\frac{4}{3}}+c^{\frac{4}{3}}\ge a^{\frac{1}{3}}\sqrt{a^2+8bc}$

$\Leftrightarrow \frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}}\ge\frac{a^{\frac{4}{3}}}{a^{\frac{4}{3}}+b^{\frac{4}{3}}+c^{\frac{4}{3}}}$ (nhận xét được chứng minh.)

Tương tự ta cũng có $\frac{b}{\sqrt{b^2+8ca}}\ge\frac{b^{\frac{4}{3}}}{a^{\frac{4}{3}}+b^{\frac{4}{3}}+c^{\frac{4}{3}}}$; $\frac{c}{\sqrt{c^2+8ab}}\ge\frac{a^{\frac{4}{3}}}{a^{\frac{4}{3}}+b^{\frac{4}{3}}+c^{\frac{4}{3}}}$

Cộng theo từng vế ba bất đẳng thức cùng chiều, ta có

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}}+\frac{b}{\sqrt{b^2+8ca}}+\frac{c}{\sqrt{c^2+8ab}}\ge\frac{a^{\frac{4}{3}}+b^{\frac{4}{3}}+c^{\frac{4}{3}}}{a^{\frac{4}{3}}+b^{\frac{4}{3}}+c^{\frac{4}{3}}}=1$$

Dấu đẳng thức có khi và chỉ khi $a = b = c$ (đpcm)

Cách 2: Để đơn giản cách viết, đặt $X = a^2 + 8bc$, $Y = b^2 + 8ca$, $Z = c^2 + 8ab$

Dễ thấy $aX + bY + cZ = a^3 + b^3 + c^3 + 24abc$

Theo bất đẳng thức Svacxơ : $\dfrac{a^2}{a\sqrt{X}}+\dfrac{b^2}{b\sqrt{Y}}+\dfrac{c^2}{c\sqrt{Z}}\ge\dfrac{(a+b+c)^2}{a\sqrt{X}+b\sqrt{Y}+c\sqrt{Z}}$ (3)

Theo Bunhiacôpski : $a\sqrt{X}+b\sqrt{Y}+c\sqrt{Z}=\sqrt{a}\sqrt{aX}+\sqrt{b}\sqrt{bY}+\sqrt{c}\sqrt{cZ}$

$\le\sqrt{(a+b+c)(aX+bY+cZ)}=\sqrt{(a+b+c)(a^3+b^3+c^3+24abc)}$ (4)

Để ý : $(a + b + c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3(a + b)(b + c)(c + a)$

$\ge a^3 + b^3 + c^3 + 3.8\sqrt{(ab)(bc)(ca)}$

hay $(a + b + c)^3 \ge a^3+b^3+c^3 +24abc$, thay vào (4) có :

$$a\sqrt{X}+b\sqrt{Y}+c\sqrt{Z}\le\sqrt{(a+b+c)(a+b+c)^3}=(a+b+c)^2.$$

Thay vào (3) có $\dfrac{a^2}{a\sqrt{X}}+\dfrac{b^2}{b\sqrt{Y}}+\dfrac{c^2}{c\sqrt{Z}}\ge\dfrac{(a+b+c)^2}{(a+b+c)^2}=1.$

Dấu đẳng thức trong các bất đẳng thức trên có khi và chỉ khi $a = b = c$ (đpcm)

Thí dụ 38

Cho a, b, c là độ dài các cạnh tam giác, chứng minh

$$Q = a^9b(a-b) + b^9c(b-c) + c^9a(c-a) \ge 0$$

Lời giải

Ta chứng minh với bài toán tổng quát hơn.

Cho a, b, c là độ dài các cạnh tam giác, chứng minh rằng với mọi số tự nhiên $n>1$ luôn có $Q = a^nb(a-b) + b^nc(b-c) + c^na(c-a) \ge 0$ (1)

• *Trước hết cm với n = 2.*

Đặt $a + b - c = 2x > 0$, $a - b + c = 2y > 0$, $b + c - a = 2z > 0$

$\Rightarrow a = x + y$, $b = y + z$, $c = z + x$.

Biểu thức Q trở thành

$$Q = xy^3 + yz^3 + zx^3 - xyz(x+y+z) = xyz\left[\frac{x^2}{y}+\frac{y^2}{z}+\frac{z^2}{x}-(x+y+z)\right]$$

Theo Svacxơ : $\dfrac{x^2}{y}+\dfrac{y^2}{z}+\dfrac{z^2}{x}\ge\dfrac{(x+y+z)^2}{x+y+z}=x+y+z$

$\Rightarrow\dfrac{x^2}{y}+\dfrac{y^2}{z}+\dfrac{z^2}{x}-x-y-z\ge0\Rightarrow Q\ge0$

Dấu đẳng thức có khi và chỉ khi $x = y = z$. Vậy khi $n = 2$, ta có $Q \ge 0$

Không mất tính tổng quát giả sử $c \le b \le a$.

• *Giả sử (1) đúng với n tức là*

$a^n b(a-b) + b^n c(b-c) + c^n a(c-a) \ge 0 \Leftrightarrow b^n c(b-c) \ge -a^n b(a-b) - c^n a(c-a)$

$\Rightarrow b^{n+1}c(b-c) \ge -a^n b^2(a-b) - c^n ab(c-a)$

$\Rightarrow a^{n+1}b(a-b) + b^{n+1}c(b-c) + c^{n+1}a(c-a) \ge a^{n+1}b(a-b) - a^n b^2(a-b) - c^n ab(c-a)$

$+ c^{n+1}a(c-a) = a^n b(a-b)^2 + ca^n(c-a)(c-b) \ge 0.$

Vậy $Q \ge 0$ đúng với $n + 1$. Theo nguyên lý quy nạp $Q \ge 0.\forall n$. Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c \Leftrightarrow \Delta ABC$ đều

(Bạn cần biết với n=2, đó là đề thi vô địch Quốc tế, 1983)

§3. PHƯƠNG PHÁP TOẠ ĐỘ VECTƠ VÀ TOẠ ĐỘ CỦA ĐIỂM

Thí dụ 1

Cho x, y, z là ba số dương và $x + y + z \le 1$. Chứng minh

$$Q = \sqrt{x^2 + \frac{1}{x^2}} + \sqrt{y^2 + \frac{1}{y^2}} + \sqrt{z^2 + \frac{1}{z^2}} \ge \sqrt{82}$$

(TSĐH, khối A, năm học 2003- 2004)

Lời giải

Gọi $\vec{a} = \left(x; \frac{1}{x}\right); \vec{b} = \left(y; \frac{1}{y}\right); \vec{c} = \left(z; \frac{1}{z}\right) \Rightarrow \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \left(x + y + z; \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right)$

Ta có: $|\vec{a}| + |\vec{b}| + |\vec{c}| \ge |\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}|$ Hay $Q \ge \sqrt{(x+y+z)^2 + \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right)^2}$

$\Leftrightarrow Q^2 \ge (x + y + z)^2 + \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right)^2$.

Dấu đẳng thức có khi và chỉ khi $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ cùng hướng. (5)

Theo Cô–si ta có $Q^2 \ge (x + y + z)^2 + \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right)^2 \ge 9\left(\sqrt[3]{(xyz)^2} + \frac{1}{\sqrt[3]{(xyz)^2}}\right)$

$$= \left(9\sqrt[3]{(xyz)^2} + \frac{1}{9\sqrt[3]{(xyz)^2}}\right) + \frac{80}{\left(3\sqrt[3]{xyz}\right)^2} \ge 2 + \frac{80}{(x+y+z)^2} = 2 + 80 = 82$$

Dấu đẳng thức trong các đánh giá trên đồng thời có khi và chỉ khi $x = y = z = \frac{1}{3}$

Vậy $Q > \sqrt{82}$ (dpcm)



Chú ý

Trong mặt phẳng cho đường thẳng (d) và hai điểm A và B không thuộc (d). M là một điểm thay đổi trên đường thẳng (d).

Tìm vị trí của M để U= MA+MB *nhận giá trị nhỏ nhất, hoặc* U= |MA − MB| *nhận giá trị lớn nhất.*

Vắn tắt lời giải

M chính là giao điểm của (d) với 1 trong 2 đoạn thẳng AB (nếu hai điểm A, B khác phía hoặc A'B, nếu 2 điểm A, B cùng phía) so với (d), trong đó A' là điểm đối xứng của A qua (d).

Chuyển sang Đại số, bài toán trên được thể hiện trong những thí dụ sau:

> **Thí dụ 2**
>
> Tìm GTLN và GTNN của hàm f(x) trên D = [3; 4]
>
> $$f(x) = \sqrt{4x^2 - 28x + 53} + \sqrt{4x^2 - 12x + 13}$$

Lời giải

a) Giá trị nhỏ nhất:

Viết lại (1) <=> $f(x)= \sqrt{(2x-7)^2 + 2^2} + \sqrt{(2x-3)^2 + 2^2}$

Rõ ràng hàm số có tập xác định là R.

Cách 1. Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, xét các vectơ $\vec{u} = (2x-7; 2)$, $\vec{v}=(3-2x; 2)$. Sẽ có $|\vec{u} + \vec{v}| = \sqrt{(-4)^2 + 4^2} = 4\sqrt{2}$, $|\vec{u}| = \sqrt{4x^2 - 28x + 53}$, $|\vec{v}| = \sqrt{x^2 - 12x + 13}$. Và $y=|\vec{u}|+|\vec{v}|$. Với $\forall\ \vec{u}, \vec{v}$ luôn có $|\vec{u}|+|\vec{v}| > |\vec{u} + \vec{v}|$ hay $y > |\vec{u} + \vec{v}|$, dấu đẳng thức có khi $\vec{u}, \vec{v}$ cùng hướng <=> $\frac{2x-7}{2} = \frac{3-2x}{2} > 0$ <=> $x = \frac{5}{2}$. Suy ra $\min_R f(x) = f\left(\frac{5}{2}\right) = 4\sqrt{2}$.

Cách 2. Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, gọi A = (7; −2); B = (3; 2); M = (2x; 0)

Sẽ có $MA= \sqrt{4x^2 - 28x + 53}$, $MB= \sqrt{x^2 - 12x + 13}$, $AB= 4\sqrt{2}$

Rõ ràng $y = MA + MB > AB = 4\sqrt{2}$

Hay $f(x) > 4\sqrt{2}$. (3)

Gọi $K(x_0; y_0)$ là giao của AB với trục Ox. (h. 20)

(Do A, B khác phía so với Ox nên K tồn tại)

Dấu đẳng thức có khi M=K. Từ $\frac{KB'}{B'B} = \frac{A'K}{A'A}$ => K là trung điểm của B'A' => $2x_0 = 5$ => $x_0 = \frac{5}{2}$ => $x = \frac{5}{2}$. (4)



Hình 20

Từ (3) và (4) suy ra GTNN của hàm số f(x) là $4\sqrt{2}$ đạt được khi $x = \frac{5}{2}$.

b) Giá trị lớn nhất. Gọi $f_1(x) = (2x-7)^2 + 4$, $f_2(x) = (2x-3)^2 + 4$

Hệ số của x^2 của hai parabol đều dương.

• Suy ra: $\max_D f_1(x) = \max\{f_1(3); f_1(4)\}$, $\max_D f_2(x) = \max\{f_2(3); f_2(4)\}$

Ta có $f_1(3) = f_1(4) = 5$; $f_2(3) = 4$; $f_2(4) = 29$

• $\underset{D}{\text{Max}}\, f(x) = \max\left\{\sqrt{f_1(3)} + \sqrt{f_2(3)}; \sqrt{f_1(4)} + \sqrt{f_2(4)}\right\}$

$$= \max\left\{\sqrt{5} + 2; \sqrt{5} + \sqrt{29}\right\} = \sqrt{5} + \sqrt{29}$$

Vậy $\max_D f(x) = f(4) = \sqrt{5} + \sqrt{29}$.

Thí dụ 3 (Đề 89III$_2$)

Tìm GTNN của hàm số : $y = \sqrt{x^2 - 2px + 2p^2} + \sqrt{x^2 - 2qx + 2q^2}$ (1)

Lời giải

Viết lại (1) $\Leftrightarrow$ $y = \sqrt{(x-p)^2 + |p|^2} + \sqrt{(q-x)^2 + |q|^2}$

Suy ra hàm số xác định $\forall x \in \mathbf{R}$. (2)

Cách 1. Giả sử $p \le q$. Xét các vectơ $\vec{u} = (x-p; |p|)$, $\vec{v} = (q-x; |q|)$

Sẽ có $\vec{u} + \vec{v} = (q-p, |q| + |p|)$; $|\vec{u} + \vec{v}| = \sqrt{(q-p)^2 + (|q|+|p|)^2}$,

$|\vec{u}| = \sqrt{(x-p)^2 + |p|^2}$, $|\vec{v}| = \sqrt{(q-x)^2 + |q|^2}$, và $y = |\vec{u}| + |\vec{v}|$

Với $\forall \vec{u}, \vec{v}$ luôn có $|\vec{u}| + |\vec{v}| \ge |\vec{u} + \vec{v}|$ hay $y \ge |\vec{u} + \vec{v}|$, dấu đẳng thức có khi $\vec{u}, \vec{v}$ cùng hướng $\Leftrightarrow$ $\dfrac{x-p}{q-x} = \dfrac{|p|}{|q|} > 0$ (*với quy ước nếu mẫu thức bằng không thì tử thức cũng bằng không*) $\Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{p|q| + q|p|}{|p| + |q|} \\ p \le x \le q \end{cases} \Leftrightarrow x_0 = \dfrac{p|q| + q|p|}{|p| + |q|}$. Từ kết quả trên suy ra : GTNN của hàm số là $y = y(x_0) = \sqrt{(p-q)^2 + (|p| + |q|)^2}$

Cách 2. Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, gọi $A = (p; -|p|)$; $B = (q; |q|)$; $M = (x; 0)$.

Sẽ có $MA = \sqrt{(x-p)^2 + |p|^2}$;

$MB = \sqrt{(q-x)^2 + |q|^2}$;

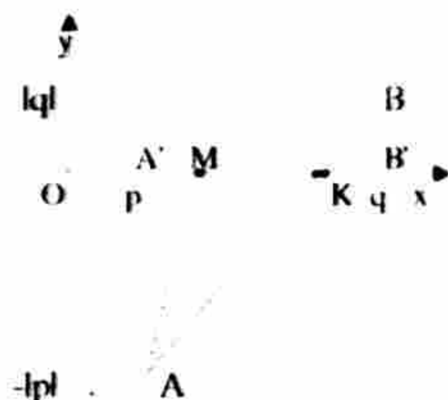
$AB = \sqrt{(q-p)^2 + (|q| + |p|)^2}$.

Rõ ràng $y = MA + MB > AB$.

Hay $y \ge \sqrt{(q-p)^2 + (|q| + |p|)^2}$ (3)

Dấu đẳng thức có khi $M \in AB$.

Điều đó xẩy ra trong 2 trường hợp sau :



Hình 21

Trường hợp 1: $x = p = q$.

Do $|p|.|q|$ trái dấu => hai điểm **A** và **B** khác phía so với Ox nên $M \in AB$. Khi đó $AB = 2|p|$ (4)

Trường hợp 2 : $x \neq p \neq q$

Gọi K là giao điểm của AB với trục Ox

(Do $|p|.|q|$ trái dấu => hai điểm A và B khác phía so với Ox nên K tồn tại.)

Ta có $\frac{KA'}{A'A} = \frac{KB'}{B'B} <=> \frac{x-p}{|p|} = \frac{q-x}{|q|} <=> x = \frac{p|q|+q|p|}{|p|+|q|}$.

(với quy ước nếu mẫu thức bằng không thì tử thức cũng bằng không)

Vậy M, A, B thẳng hàng $<=> M \equiv K <=> x = \frac{p|q|+q|p|}{|p|+|q|}$ (5)

Từ (3), (4), (5) suy ra trong mọi trường hợp luôn có GTNN của hàm số là $y = \sqrt{(q-p)^2 + (|q|+|p|)^2}$, đạt được khi $x = \frac{p|q|+q|p|}{|p|+|q|}$. (h. 21)

• ***Lời bình.***

** Giả sử $p < q$. Phương pháp trên chỉ áp dụng được khi có đồng thời 2 điều kiện:*

⊕ *Các biểu thức dưới dấu căn không âm và hệ số của x^2 bằng nhau.*

⊕ *Dấu đẳng thức xảy ra khi $x \in [p; q]$*

** Bản chất biến đổi là "tách bình phương đủ"*

** Sắp xếp cho tung độ của A và B trái dấu để đoạn thẳng AB cắt trục Ox.*

** Trong bài toán trên, toạ độ điểm **M** được tạo thành khi ta "tách bình phương đủ" và gán cho $M = (x; 0) \Rightarrow M \in (d) = Ox$*

Thí dụ 4

Tìm GTLN của biểu thức hàm số $f(x) = \left| \sqrt{x^2 - 2x + 5} - \sqrt{x^2 - 12x + 136} \right|$

Lời giải

Để ý $\begin{cases} x^2 - 2x + 5 = (x-1)^2 + 4 \geq 4, \forall x \in R \\ x^2 - 12x + 136 = (6-x)^2 + 100 \geq 100, \forall x \in R \end{cases}$

do vậy hàm số xác định với $\forall x \in R$.

• Xét các vectơ: $\vec{a} = (x-1; -2)$, $\vec{b} = (6-x; 10)$. Ta có $|\vec{a}| = \sqrt{x^2 - 2x + 5}$,

$|\vec{b}| = \sqrt{x^2 - 12x + 136}$, $\vec{a} + \vec{b} = (5; 8)$ và $|\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{5^2 + 8^2} = \sqrt{89}$

• Với mọi $\vec{a}$, $\vec{b}$ ta có $\left||\vec{a}| - |\vec{b}|\right| \leq |\vec{a} + \vec{b}|$ suy ra $f(x) \leq \sqrt{89}$.

Dấu đẳng thức có khi và chỉ khi $\vec{a} = \vec{0}$ hoặc $\vec{b} = \vec{0}$ hoặc $\vec{a}$, $\vec{b}$ trái hướng (*)

Hai khả năng $\vec{a} = \vec{0}$, $\vec{b} = \vec{0}$ không xảy ra do $y_{\vec{a}} \neq 0$, $y_{\vec{b}} \neq 0$ $\forall x \in R$ suy ra

(*) <=> $\vec{a}$ trái hướng với $\vec{b}$ <=> $\frac{6-x}{x-1} = \frac{10}{-2} < 0 <=> 6 - x = 5(x-1) <=> x = \frac{11}{4}$.

Vậy $\max f(x) = \sqrt{89}$



Chú ý:

Trong mặt phẳng cho 2 đường thẳng song song (d), (d') và hai điểm A và B không thuộc (d), (d'). M là một điểm thay đổi trên đường thẳng (d). N là một điểm thay đổi trên đường thẳng (d').

Tìm vị trí của M, N để U= MA+MN+MB nhận giá trị nhỏ nhất.

• Bây giờ xét bài toán trên được thể hiện trong thí dụ sau :

Thí dụ 5. (Học sinh giỏi lớp 12, tỉnh Hà Tĩnh, 2000)

Cho 4 số thực a, b, c, d thoả mãn điều kiện (I) $\begin{cases} 2a + b = 6 \\ 2c + d = 2 \end{cases}$.

Hãy tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$U = \sqrt{(a-4)^2 + (b-3)^2} + \sqrt{(a-c)^2 + (b-d)^2} + \sqrt{(c+1)^2 + (d+3)^2}$$

Lời giải

Cách 1. Trong mặt phẳng toạ độ toạ độ xét 4 vectơ

$\vec{u} = (a-4;\, b-3)$ $\vec{v} = (c-a;\, d-b)$, $\vec{w} = (-c-1;\, -d-3)$. Sẽ có $\vec{u} + \vec{v} + \vec{w} = (-5;\, -6)$,

$|\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}| = \sqrt{61}$, $U = |\vec{u}| + |\vec{v}| + |\vec{w}|$. Rõ ràng $U \ge |\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}| = \sqrt{61}$

Dấu đẳng thức có khi các véc tơ $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ cùng hướng

$$\Leftrightarrow \frac{3-b}{4-a} = \frac{d-b}{c-a} = \frac{3+d}{1+c} = \frac{6}{5} > 0 \Leftrightarrow \text{(II)} \begin{cases} 6a - 5b = 9 \\ 6c - 5d = 9 \end{cases}.$$

Kết hợp với (I) suy ra :

- a, b là nghiệm của hệ $\begin{cases} 2a + b = 6 \\ 6a - 5b = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \left(a = \frac{39}{16};\, b = \frac{9}{8}\right)$
- Tương tự hệ $\begin{cases} 2c + d = 2 \\ 6c - 5d = 9 \end{cases}$ cho $\left(c = \frac{19}{16};\, d = -\frac{3}{8}\right)$.

Từ các kết quả đã có suy ra : $U = \sqrt{61}$ là GTNN của U, đạt được khi

$$\left\{a = \frac{39}{16}, b = \frac{9}{8}, c = \frac{19}{16}, d = -\frac{3}{8}\right\}$$

Cách 2. Trong mặt phẳng toạ độ xét 4 điểm M(a; b), N(c; d), A(4; 3), B(-1; -3) và các đường thẳng $(\mathcal{D}_1)$: 2x + y = 6; $(\mathcal{D}_2)$: 2x + y = 2

Rõ ràng khi a, b, c, d thay đổi thì :

- M di chuyển trên $(\mathcal{D}_1)$. N di chuyển trên $(\mathcal{D}_2)$ và

$$AM = \sqrt{(a-4)^2 + (b-3)^2}\ ; \quad MN = \sqrt{(a-c)^2 + (b-d)^2}\ ;$$

$$NB = \sqrt{(c+1)^2 + (d+3)^2}\ ; \quad AB = \sqrt{61}$$

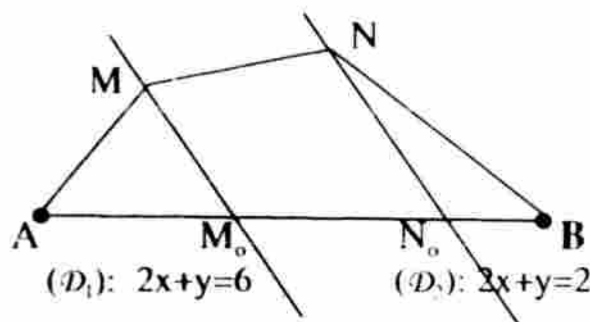
• $U = AM + MN + NB \geq AB = \sqrt{61}$. Dấu đẳng thức có khi M, N thuộc đoạn thẳng AB, tức là khi $M \equiv M_0$; $N \equiv N_0$ trong đó $M_0=(x_0; y_0)$ là giao của AB và (D_1), $N_0=(x_1; y_1)$ là giao của AB và (D_2). (1)

• Phương trình đường thẳng AB là $\frac{x - x_B}{x_A - x_B} = \frac{y - y_B}{y_A - y_B}$ hay $\frac{x+1}{5} = \frac{y+3}{6}$

$\Leftrightarrow 6x - 5y = 9$.

Xét hệ phương trình $\begin{cases} 2x + y = 6 \\ 6x - 5y = 9 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{39}{16} \\ y = \frac{9}{8} \end{cases} \Rightarrow M_0=\left(\frac{39}{16}; \frac{9}{8}\right)$.



Hình 22

Tương tự hệ $\begin{cases} 2x + y = 2 \\ 6x - 5y = 9 \end{cases}$ cho $N_0=\left(\frac{19}{16}; -\frac{3}{8}\right)$. (2)

Thấy rằng $-3 < -\frac{3}{9} < \frac{9}{8} < 3 \Rightarrow M_0$ và N_0 thuộc đoạn thẳng AB. (3)

Từ (1), (2), (3) suy ra :

GTNN của U là $U=\sqrt{61}$, đạt được khi $\left\{a = \frac{39}{16}, b = \frac{9}{8}, c = \frac{19}{16}, d = -\frac{3}{8}\right\}$

Thí dụ 6. (Trở lại thí dụ 6§1chương V)

Tìm GTLN và GTNN của biểu thức $Q=\frac{(x + y)(1 - xy)}{(1 + x^2)(1 + y^2)}$ (1)

Lời giải

Xét các vectơ $\vec{a} = \left(\frac{2x}{1 + x^2}; \frac{1 - x^2}{1 + x^2}\right)$, $\vec{b} = \left(\frac{1 - y^2}{1 + y^2}; \frac{2y}{1 + y^2}\right)$

$\Rightarrow \begin{cases} |\vec{a}| = |\vec{b}| = 1 \Rightarrow |\vec{a}|\cdot|\vec{b}| = 1 \\ |\vec{a}.\vec{b}| = 2\left|\frac{x(1 - y^2) + y(1 - x^2)}{(1 + x)^2(1 + y)^2}\right| \end{cases}$ Ta có $|\vec{a}.\vec{b}| \leq |\vec{a}||\vec{b}|$ hay $2|Q| \leq 1 \Leftrightarrow |Q| \leq \frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow -\frac{1}{2} \leq Q \leq \frac{1}{2}$. **Dấu đẳng thức có khi và chỉ khi $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng phương**

$\Leftrightarrow \frac{1 - y^2}{1 + y^2} \cdot \frac{1 + x^2}{2x} = \frac{2y}{(1 + y^2)} \cdot \frac{1 + x^2}{1 - x^2} \Leftrightarrow \frac{1 - y^2}{2x} = \frac{2y}{1 - x^2} \Leftrightarrow (1 - x^2)(1 - y^2) = 4xy$

$\Leftrightarrow 1 - 2xy + (xy)^2 = x^2 + y^2 + 2xy \Leftrightarrow (1 + xy)^2 = (x + y)^2 \Leftrightarrow |1 - xy| = |x + y|$

Vậy GTNN của Q là $Q=-\frac{1}{2}$, GTLN của Q là $Q=\frac{1}{2}$

(Bạn có thể giải bài toán bằng phương pháp lượng giác)

Thí dụ 7

Cho a, b, c, d là các số thực thoả mãn hai điều kiện :

$$a^2 + b^2 + 1 = 2(a + b);\ c^2 + d^2 + 36 = 12(c + d).$$

Chứng minh : 1) $(\sqrt{2} - 1)^6 \leq (a - c)^2 + (b - d)^2 \leq (\sqrt{2} + 1)^6$

2) $74 - 37\sqrt{2} \leq a + b + 6c + 6d \leq 74 + 37\sqrt{2}$

Lời giải

1) Theo giả thiết $\begin{cases} a^2 + b^2 + 1 = 1 \\ c^2 + d^2 + 36 = 12(c + g) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a - 1)^2 + (b - 1)^2 = 1 \\ (c - 6)^2 + (d - 6)^2 = 36 \end{cases}$ (*)

Gọi $(\mathscr{C}_1), (\mathscr{C}_2)$ theo thứ tự là các đường tròn tâm $O_1(1;1)$, $O_2(6; 6)$; M(a; b), N(c; d) là các điểm trong mặt phẳng toạ độ đang xét.

Các số thực a, b, c, d thoả mãn (*) khi và chỉ khi $M \in (\mathscr{C}_1)$, $N \in (\mathscr{C}_2)$.

Ta có $MN = \sqrt{(a - c)^2 + (c - d)^2}$ Dễ thấy O, O_1, O_2 thẳng hàng.

Đường thẳng này cắt $(\mathscr{C}_1)$, $(\mathscr{C}_2)$ theo thứ tự tại M_1, M_2 và N_1, N_2.

Dễ thấy $M_2N_1 \leq MN \leq M_1N_2$. (h. 23)

Câu 1. Do $OO_1 = \sqrt{2}$ $OO_2 = 6\sqrt{2}$ nên ta có

$M_2N_1 = ON_2 - OM_1 = (OO_2 + O_2N_2) - (OO_1 + O_1M_1) = (6\sqrt{2} + 6) - (\sqrt{2} - 1) = 5\sqrt{2} + 7$

Tương tự $M_1N_2 = 5\sqrt{2} - 7$.

Từ đó suy ra điều phải chứng minh.

Dấu đẳng thức :

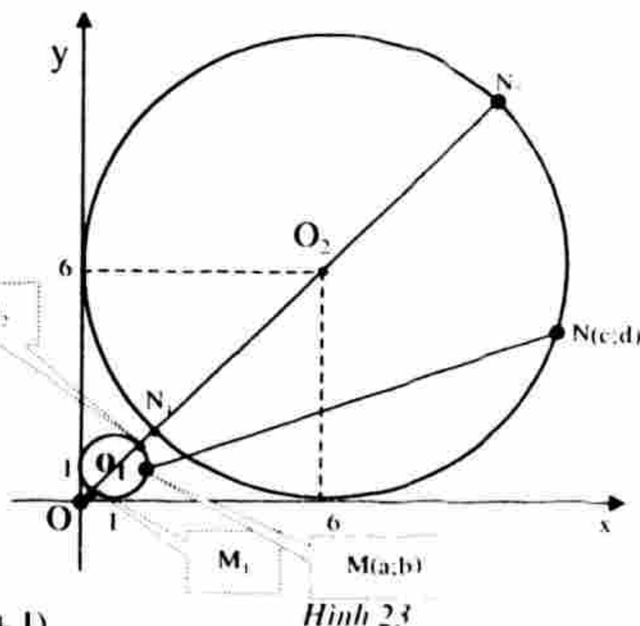
- $(a - c)^2 + (b - d)^2 = (\sqrt{2} - 1)^6$

có và chỉ khi $M \equiv M_1$ và $N \equiv N_2$

$\Leftrightarrow a = b = \dfrac{2 - \sqrt{2}}{2}$; $c = d = \dfrac{6 + \sqrt{3}}{2}$

- $(a-c)^2 + (b-d)^2 = (\sqrt{2} + 1)^6$ có khi và chỉ khi $M \equiv M_2$ và $N \equiv N_1$

$\Leftrightarrow a = b = \dfrac{2 + \sqrt{2}}{2}$; $c = d = \dfrac{6 - \sqrt{3}}{2}$



Hình 23

2) Ta có (*) $\Leftrightarrow \begin{cases} a + b = \dfrac{1}{2}(a^2 + b^2 + 1) \\ 6c + 6d = \dfrac{1}{2}(c^2 + d^2 + 16) \end{cases}$

$\Rightarrow a + b + 6(c + d) = \dfrac{1}{2}(a^2 + b^2 + 1 + c^2 + d^2 + 36)$

$\Rightarrow a + b + 6(c + d) = OM^2 + ON^2$ (3)

- Rõ ràng $OM_1^2 + ON_1^2 \leq OM^2 + ON^2 \leq OM_2^2 + ON_2^2$ (4)

Mặt khác $OM^2 + ON^2 = (\sqrt{2} + 1)^2 + (6\sqrt{2} + 6)^2 = 37(\sqrt{2} + 1)^2 = 111 + 74\sqrt{2}$ (5)

Tương tự $OM_1^2 + ON_1^2 = 111 - 74\sqrt{2}$ (6)

Từ (3), (4), (5), (6) suy ra $74 - 37\sqrt{2} < a + b + 6c + 6d < 74 + 37\sqrt{2}$

Đó là đpcm.

§4. PHƯƠNG PHÁP SỬ DỤNG ĐỊNH LÝ SIN, ĐỊNH LÝ COSIN

Thí dụ 1

Cho ΔABC nội tiếp đường tròn bán kính $R = 1$. Gọi m_a, m_b, m_c lần lượt là độ dài đường trung tuyến kẻ từ các đỉnh A, B, C của ΔABC.

Tìm GTNN của biểu thức $Q = \dfrac{\sin A}{m_a} + \dfrac{\sin B}{m_b} + \dfrac{\sin C}{m_c}$.

Lời giải

Theo định lý hàm số sin có $\dfrac{a}{2} = R\sin A = \sin A$ (do $R = 1$).

Tương tự $\dfrac{b}{2} = \sin B$, $\dfrac{c}{2} = \sin C$. Do vậy $Q = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{a}{m_a} + \dfrac{b}{m_b} + \dfrac{c}{m_c}\right)$ (1)

Ta có $m_a^2 = \dfrac{b^2 + c^2}{2} - \dfrac{a^2}{4} \Rightarrow 4m_a^2 + 3a^2 = 2(a^2 + b^2 + c^2)$. Theo BĐT Cô–si

$4m_a^2 + 3a^2 \geq 4a.m_a\sqrt{3} \Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 \geq 2a.m_a\sqrt{3} \Leftrightarrow \dfrac{a}{2m_a} \geq \dfrac{\sqrt{3}a^2}{a^2 + b^2 + c^2}$

Dấu đẳng thức có khi và chỉ khi $4m_a^2 = 3a^2 \Leftrightarrow 2(b^2 + c^2) - a^2 = 3a^2 \Leftrightarrow b^2 + c^2 = 2a^2$

Tương tự $\dfrac{b}{2m_a} \geq \dfrac{\sqrt{3}b^2}{a^2 + b^2 + c^2}$, $\dfrac{c}{2m_a} \geq \dfrac{\sqrt{3}c^2}{a^2 + b^2 + c^2}$

Thay vào (1) ta có $Q \geq \dfrac{\sqrt{3}(a^2 + b^2 + c^2)}{a^2 + b^2 + c^2} = \sqrt{3}$

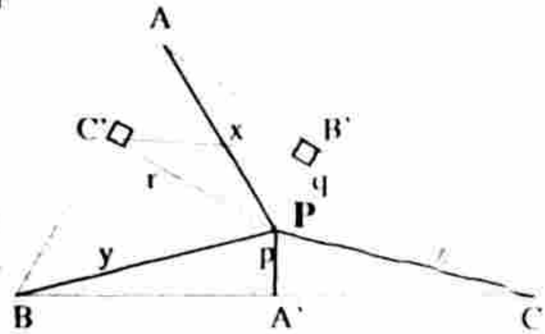
Dấu đẳng thức có khi và chỉ khi $\begin{cases} b^2 + c^2 = 2a^2 \\ c^2 + a^2 = 2b^2 \\ a^2 + b^2 = 2c^2 \end{cases} \Leftrightarrow a = b = c \Leftrightarrow \Delta ABC$ đều.

Vậy $\min Q = \sqrt{3}$

Thí dụ 2

Giả sử P là một điểm bất kỳ trong ΔABC. Ký hiệu $x = PA$, $y = PB$, $z = PC$ và p, q, r theo thứ tự lần lượt là độ dài các khoảng cách từ P đến các cạnh BC, CA, AB. Chứng minh $\min Q = 2$ với $Q = \dfrac{x + y + z}{p + q + r}$

Lời giải



Hình 24

Cách 1 (Định lý cosin)

Trong mặt phẳng ΔABC, từ P kẻ $PC' \perp AB$, $PA' \perp BC$ và $PB' \perp CA$. Nối B'C'.

Do $\angle AB'P = \angle AC'P = 90^0 \Rightarrow AB'PC'$ là tứ giác nội tiếp đường tròn đường kính AP = x.

Áp dụng định lý hàm số sin vào ΔAB'C' ta có : B'C'=xsinA

Lại áp dụng định lý hàm số cosin vào ΔPB'C' ta có: $B'C'^2 = PC'^2 + PB'^2 - 2PC'.PB'\cos\angle C'PB'$

$\Leftrightarrow B'C'^2 = r^2 + q^2 + 2r.q\cos A$ (do $\angle B'AC' + \angle B'PC' = 180^0$)

$\Leftrightarrow B'C'^2 = r^2 + q^2 - 2r.q\cos(B + C) \Leftrightarrow B'C'^2 = r^2 + q^2 - 2r.q(\cos B\cos C - \sin B\sin C)$

$\Leftrightarrow B'C'^2 = r^2(\cos^2 B + \sin^2 B) + q^2(\cos^2 C + \sin^2 C) - 2r.q(\cos B\cos C - \sin B\sin C)$

$\Leftrightarrow B'C'^2 = (r\sin B + q\sin C)^2 + (r\cos B - q\cos C)^2 \geq (r\sin B + q\sin C)^2$

$\Rightarrow B'C' \geq r\sin B + q\sin C$ hay $x\sin A \geq r\sin B + q\sin C \Rightarrow x \geq r\dfrac{\sin B}{\sin A} + r\dfrac{\sin C}{\sin A}$

Tương tự ta cũng có $y \geq p\dfrac{\sin C}{\sin B} + r\dfrac{\sin A}{\sin B}$; $z \geq q\dfrac{\sin A}{\sin C} + r\dfrac{\sin C}{\sin A}$

Từ đó ta có

$$X + y + z \geq p\left(\frac{\sin B}{\sin C} + \frac{\sin C}{\sin B}\right) + q\left(\frac{\sin C}{\sin A} + \frac{\sin A}{\sin C}\right) + r\left(\frac{\sin A}{\sin B} + \frac{\sin B}{\sin A}\right) \qquad (*)$$

Trong ΔABC ta có sinA > 0, sinB > 0, sinC > 0. Do vậy

Theo Cô–si $\dfrac{\sin B}{\sin C} + \dfrac{\sin C}{\sin B} \geq 2$, $\dfrac{\sin C}{\sin A} + \dfrac{\sin A}{\sin C} \geq 2$, $\dfrac{\sin A}{\sin B} + \dfrac{\sin B}{\sin A} \geq 2$

Nên từ (*) $\Rightarrow x + y + z \geq 2(p + q + r)$. (đpcm)

Dấu đẳng thức có khi và chỉ khi $\begin{cases} r\cos B - q\cos C = 0 \\ \sin A = \sin B = \sin C \end{cases} \Leftrightarrow$ ΔABC đều.

Cách 2 :

Từ C', B' hạ các đường thẳng vuông góc với BC.

Gọi F, F theo thứ tự là hình chiếu vuông góc của P lần lượt trên C'K, B'L.

Sẽ có $\angle PC'E = \angle ABC$, $PB'F = \angle ACB$

(góc có cạnh tương ứng vuông góc)

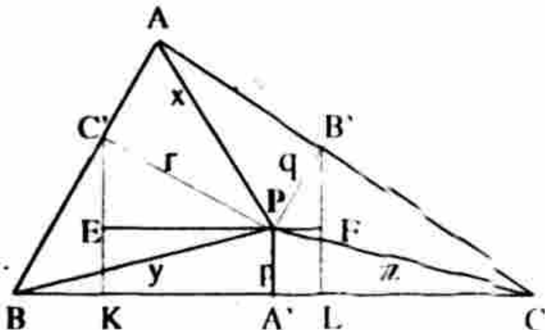
Từ đó $\begin{cases} PE = PC'\sin C' = r\sin B \\ PF = PB'\sin B' = q\sin C \end{cases}$ ∞

$\Rightarrow PE + PF = r\sin B + q\sin C$

$\Leftrightarrow EF = r\sin B + q\sin C$.

Hiển nhiên ta có $B'C' \geq EF = r\sin B + q\sin C$

hay $x\sin A \geq r\sin B + q\sin C$



Hình 25

$\Leftrightarrow \quad x > r\dfrac{\sin B}{\sin A} + q\dfrac{\sin C}{\sin A}$. Đến đây, tiếp nối như cách 1

Chú ý. Từ kết quả bài toán (giữ nguyên kí hiệu x, y, z, p, q, r) ta có:

$x + y + z \geq 2(p + q + r)$. *Đó là bất đẳng thức Ecđôtsơ*

> **Thí dụ 3**
> Cho tam giác ABC và x, y, z là các số thực không đồng thời bằng không.
> Chứng minh: $2xy\cos C + 2yz\cos A + 2zx\cos B \leq x^2 + y^2 + z^2$

Lời giải

Gọi I là một điểm bất kỳ trong miền tam giác ABC, $\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}$ là các vectơ đơn vị. (h. 26).

Đặt các vectơ $\overrightarrow{IA_1} = \vec{e_1}$, $\overrightarrow{IX} = x\vec{e_1}$, $\vec{e_1}$ có phương vuông góc với BC

Đặt các vectơ $\overrightarrow{IB_1} = \vec{e_2}$, $\overrightarrow{IY} = y\vec{e_2}$, $\vec{e_2}$ có phương vuông góc với CA

Đặt các vectơ $\overrightarrow{IC_1} = \vec{e_3}$, $\overrightarrow{IZ} = z\vec{e_3}$, $\vec{e_3}$ có phương vuông góc với AB

Ta có $\left(\overrightarrow{IX} + \overrightarrow{IY} + \overrightarrow{IZ}\right)^2 \geq \vec{0} \Leftrightarrow (x\vec{e_1} + y\vec{e_2} + z\vec{e_3})^2 \geq 0$

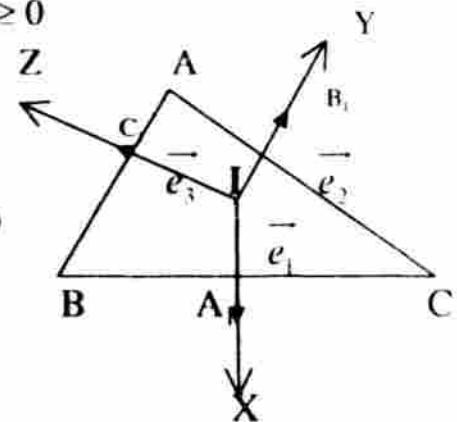
$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 + 2xy\cos(\vec{e_1}, \vec{e_2})$

$\qquad + 2yz\cos(\vec{e_2}, \vec{e_3}) + 2zx\cos(\vec{e_3}, \vec{e_1}) \geq 0$

$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 - 2xy\cos C - 2yz\cos A - 2zx\cos B \geq 0$ (1)

$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 \geq 2xy\cos C + 2yz\cos A + 2zx\cos B$

(đpcm)



Hình 26

Dấu đẳng thức:

(1) $\Leftrightarrow x^2(\sin^2 B + \cos^2 B) + y^2(\sin^2 A + \cos^2 A) + z^2$

$\qquad + 2xy\cos(A + B) - 2yz\cos A - 2zx\cos B \geq 0$

$\Leftrightarrow x^2\sin^2 B + x^2\cos^2 B + y^2\sin^2 A + y^2\cos^2 B + z^2 +$

$\qquad + 2xy(\cos A\cos B - \sin A\sin B) - 2yz\cos A - 2zx\cos B \geq 0$

$\Leftrightarrow (x^2\sin^2 B - 2xy\sin A\sin B + y^2\sin^2 A) + (x^2\cos^2 B + y^2\cos^2 B + z^2 + 2xy\cos A\cos B$

$\quad - 2yz\cos A - 2zx\cos B) \geq 0 \Leftrightarrow (x\sin B - y\sin A)^2 + (x\cos B + y\cos A - z)^2 \geq 0$

Dấu đẳng thức có khi và chỉ khi (*) $\begin{cases} x\sin B - y\sin A = 0 & (2) \\ x\cos B + y\cos A - z = 0 & (3) \end{cases}$

Ta có (2) $\Leftrightarrow y = \dfrac{x\sin B}{\sin A}$, thế vào (3) có $x\cos B + \dfrac{x\sin B\cos A}{\sin A} = z$

$\Leftrightarrow x\sin(A + B) = z\sin A \Leftrightarrow x\sin C = z\sin A$

Do vậy (*) $\Leftrightarrow \begin{cases} x\sin B = y\sin A \\ x\sin C = z\sin A \end{cases}$ Hay $x : y : z = \sin A : \sin B : \sin C$ (4)

• **Lời bình.**

1) Khi $x=y=z=1$ ta có $\cos A + \cos B + \cos C \le \frac{3}{2}$

Dấu đẳng thức có khi và chỉ khi sinA: sinB: sinC=1:1:1 ⇔ ΔABC đều

2) Trong quá tìm đi tìm chân trị của maxQ, ta thấy rằng giả thiết A, B, C là ba góc của tam giác chỉ để có: $\cos(A+B)=-\cos C$. Vì thế ta có kết luận rộng hơn :

Nếu A, B, C là các số dương thoả mãn $A+B+C=k\pi$, thì với $\forall(x, y, z) \in R$ luôn có $2xy\cos C + 2yz\cos A + 2zx\cos B \le x^2 + y^2 + z^2$ (2)
Dấu đẳng thức có khi và chỉ khi x : y : z = sinA : sinB : sinC

3) Với tam giác đặc biệt, nhiều khi người ta ghi trực tiếp các giá trị $\cos A = \alpha$, $\cos B=\beta$, $\cos C=\gamma$ cho bất đẳng thức (2) hiện hữu dưới dạng

$$2\alpha xy + 2\beta yz + 2\gamma zx \le x^2 + y^2 + z^2$$

Chẳng hạn:

Chứng minh $\frac{\sqrt{2}}{x} + \frac{\sqrt{3}}{y} - \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{z} \le x^2 + y^2 + z^2$ trong đó x, y, z là nghiệm của phương trình $ax^3 + bx^2 + cx + a = 0$ $(a \ne 0)$

Bạn cần biết rằng $\sqrt{2} = 2\cos 45^0$; $\sqrt{3} = 2\cos 30^0$; $-\sqrt{2+\sqrt{3}} = 2\cos 105^0$

Vậy áp dụng (2) cho ΔABC với $A=45^0$, $B=30^0$ với lưu ý $xyz=1$, kết quả đến một cách tự nhiên.

4) Khi $xyz>0$ ta có (2) ⇔ $\frac{\cos A}{x} + \frac{\cos B}{y} + \frac{\cos C}{z} \le \frac{x}{2yz} + \frac{y}{2zx} + \frac{z}{2xy}$ (2')

hay thay x bởi $\frac{1}{x}$, y bởi $\frac{1}{y}$, z bởi $\frac{1}{z}$ ta có

$$x\cos A + y\cos B + z\cos C \le \frac{yz}{2x} + \frac{zx}{2y} + \frac{xy}{2z} \quad (2'')$$

Dấu đẳng thức có khi và chỉ khi x: y: z=sinA: sinB: sinC

5) Các bất đẳng thức (2), (2'), (2") cho ta nhận dạng tam giác ABC nếu nó thoả mãn một trong các bất đẳng thức:

- $2xy\cos C + 2yz\cos A + 2zx\cos B \ge x^2 + y^2 + z^2$
- $\frac{\cos A}{x} + \frac{\cos B}{y} + \frac{\cos C}{z} \ge \frac{x}{2yz} + \frac{y}{2zx} + \frac{z}{2xy}$
- $x\cos A + y\cos B + z\cos C \ge \frac{yz}{2x} + \frac{zx}{2y} + \frac{xy}{2z}$

Chẳng hạn:

Nhận dạng ΔABC, nếu nó thoả mãn một trong các bất đẳng thức sau :

a) $\frac{\cos A}{3} + \frac{\cos B}{4} + \frac{\cos C}{5} \ge \frac{5}{12}$ (7)

b) $\cos A+\cos B+\frac{\cos C}{\sqrt{3}} > \frac{2}{\sqrt{3}}$ (8)

Câu a). Theo (2') ta có $\frac{\cos A}{3}+\frac{\cos B}{4}+\frac{\cos C}{5} < \frac{3}{2.4.5}+\frac{4}{2.3.5}+\frac{5}{2.3.4} = \frac{5}{12}$

Suy ra (7) <=> $\frac{\cos A}{3}+\frac{\cos B}{4}+\frac{\cos C}{5}=\frac{5}{12}$ <=> sinA : sinB : sinC = 3 : 4 : 5

<=> a : b : c = 3 : 4 : 5 <=> ΔABC vuông tại C.

Câu b). Theo (2') với $x = y = 1$, $z=\sqrt{3}$ ta có

$$\frac{\cos A}{1}+\frac{\cos B}{1}+\frac{\cos C}{\sqrt{3}} < \frac{1}{2.1.\sqrt{3}}+\frac{1}{2.1.\sqrt{3}}+\frac{\sqrt{3}}{2.1.1}=\frac{2}{\sqrt{3}}$$

Do vậy (8) <=> $\cos A+\cos B+\frac{\cos C}{\sqrt{3}}=\frac{2}{\sqrt{3}}$ <=> sinA : sinB : sinC = 1 : 1 : $\sqrt{3}$

<=> ΔABC cân tại C và $C = 120^0$

Thí dụ 5

Cho a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác, x, y, z là các số thực thoả mãn $x+y+z=\frac{\pi}{2}$. Tìm GTLN của biểu thức : $Q=\frac{\sin x}{a}+\frac{\sin y}{b}+\frac{\sin z}{c}$

Lời giải

Đặt $x=\frac{\pi}{2}-\alpha$, $y=\frac{\pi}{2}-\beta$, $z=\frac{\pi}{2}-\gamma \Rightarrow \alpha+\beta+\gamma=\pi$

Biểu thức Q trở thành $Q=\frac{\cos\alpha}{a}+\frac{\cos\beta}{b}+\frac{\cos\gamma}{c}$

Theo (2') ta có $Q \le \frac{a}{2bc}+\frac{b}{2ca}+\frac{c}{2ab}=\frac{a^2+b^2+c^2}{2abc}$

Dấu đẳng thức có khi và chỉ khi sinα : sinβ : sinγ = a : b : c (*)

Mặt khác trong ΔABC luôn có : sinA : sinB : sinC = a : b: c (định lý sin).

Suy ra với (α =A; β=B; γ=C) <=> ($x=\frac{\pi}{2}-A$; $y=\frac{\pi}{2}-B$; $z=\frac{\pi}{2}-C$) thì (*) được thoả mãn. Vậy $\max Q=\frac{a^2+b^2+c^2}{2abc}$

Thí dụ 6.

Cho ΔABC và x, y, z là các số thực không đồng thời bằng không.

Chứng minh : $x^2+y^2+z^2+2xy\cos 2C+2yz\cos 2A+2zx\cos 2B > 0$

Lời giải

Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC, $\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}$ là các vectơ đơn v. (h. 27)

Đặt các vectơ $\overrightarrow{OA_1}=\vec{e_1}$, $\overrightarrow{OX}=x\vec{e_1}$, $\vec{e_1}$ cùng phương với OA

Đặt các vectơ $\overrightarrow{OB_1} = \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{OY} = y\overrightarrow{e_2}$, $\overrightarrow{e_2}$ cùng phương với $\overrightarrow{OB}$

Đặt các vectơ $\overrightarrow{OC_1} = \overrightarrow{e_3}, \overrightarrow{OZ} = z\overrightarrow{e_3}$, $\overrightarrow{e_3}$ cùng phương với $\overrightarrow{OC}$

Ta có $\left(\overrightarrow{OX} + \overrightarrow{OY} + \overrightarrow{OZ}\right)^2 \geq \vec{0} \Leftrightarrow (x\overrightarrow{e_1} + y\overrightarrow{e_2} + z\overrightarrow{e_3})^2 \geq 0$

$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 + 2xy\cos(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}) + 2yz\cos(\overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}) + 2zx\cos(\overrightarrow{e_3}, \overrightarrow{e_1}) \geq 0$

$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 + 2xy\cos 2C + 2yz\cos 2A + 2zx\cos 2B \geq 0$ (dpcm) (1)

Dấu đẳng thức:

(1) $\Leftrightarrow x^2(\sin^2 2B + \cos^2 2B) + y^2(\sin^2 2A + \cos^2 2A)$

$+ z^2 + 2xy\cos(2A + 2B) + 2yz\cos 2A + 2zx\cos 2B \geq 0$

$\Leftrightarrow x^2\sin^2 2B + x^2\cos^2 2B + y^2\sin^2 2A + y^2\cos^2 2B$

$+ z^2 + 2xy(\cos 2A\cos 2B - \sin 2A\sin 2B) + 2yz\cos 2A + 2zx\cos 2B \geq 0$

$\Leftrightarrow (x^2\sin^2 2B - 2xy\sin 2A\sin 2B + y^2\sin^2 2A) + (x^2\cos^2 2B + y^2\cos^2 2B + z^2)$

$+ (2xy\cos 2A\cos 2B + 2yz\cos 2A + 2zx\cos 2B) \geq 0$

$\Leftrightarrow (x\sin 2B - y\sin 2A)^2 + (x\cos 2B + y\cos 2B + z)^2 \geq 0$

Dấu đẳng thức có khi và chỉ khi

$$(*)\begin{cases} x\sin 2B - y\sin 2A = 0 & (2) \\ x\cos 2B + y\cos 2A + z = 0 & (3) \end{cases}$$

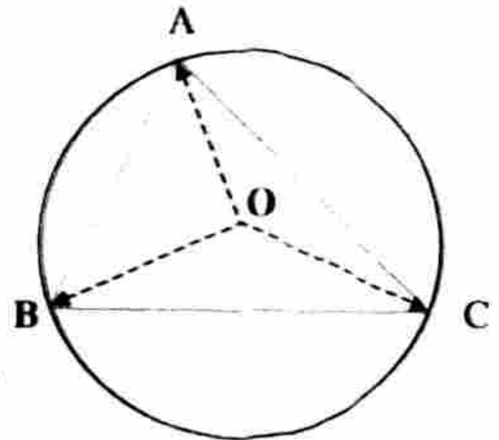
Ta có (4) $\Leftrightarrow$ $y = \dfrac{x\sin 2B}{\sin 2A}$, thế vào (5) có

$$x\cos 2B + \frac{x\sin 2B\cos 2A}{\sin 2A} = z$$

$\Leftrightarrow$ $x\sin(2A + 2B) + z\sin 2A \Leftrightarrow x\sin 2C = z\sin 2A$

Do vậy $(*) \Leftrightarrow \begin{cases} x\sin 2B = y\sin 2A \\ x\sin 2C = z\sin 2A \end{cases}$

hay $x : y : z = \sin 2A : \sin 2B : \sin 2C$



Hình 27

- **Lời bình.**

1) Khi $x=y=z=1$ ta có $\cos 2A + \cos 2B + \cos 2C \geq -\dfrac{3}{2}$

*Dấu đẳng thức có **khi và chỉ khi** $\sin 2A : \sin 2B : \sin 2C = 1:1:1 \Leftrightarrow \Delta ABC$ đều*

2) Bất đẳng thức $\Leftrightarrow 2xy\cos 2C + 2yz\cos 2A + 2zx\cos 2B \geq -(x^2 + y^2 + z^2)$ (2)

đúng với $\forall (x, y, z) \in R$.

3) Khi $xyz>0$, chia vế theo vế ta có

$$(2) \Leftrightarrow \frac{\cos 2A}{x} + \frac{\cos 2B}{y} + \frac{\cos 2C}{z} \geq -\left(\frac{x}{2yz} + \frac{y}{2zx} + \frac{z}{2xy}\right) \qquad (2')$$

hay thay x bởi $\frac{1}{x}$, y bởi $\frac{1}{y}$, z bởi $\frac{1}{z}$ ta có

$$x\cos 2A + y\cos 2B + z\cos 2C \geq -\left(\frac{yz}{2x} + \frac{zx}{2y} + \frac{xy}{2z}\right) \qquad (2'')$$

Dấu đẳng thức có khi và chỉ khi $x : y : z = \sin 2A : \sin 2B : \sin 2C$

4) Các bất đẳng thức (2), (2'), (2'') cho ta nhận dạng tam giác ABC nếu nó thoả mãn một trong các bất đẳng thức

- $2xy\cos 2C + 2yz\cos 2A + 2zx\cos 2B \leq -(x^2 + y^2 + z^2)$
- $\frac{\cos 2A}{x} + \frac{\cos 2B}{y} + \frac{\cos 2C}{z} \leq -\left(\frac{x}{2yz} + \frac{y}{2zx} + \frac{z}{2xy}\right)$
- $x\cos 2A + y\cos 2B + z\cos 2C \leq -\left(\frac{yz}{2x} + \frac{zx}{2y} + \frac{xy}{2z}\right)$

5) Cho x=a, y=b, z=c ta có (2) $\Leftrightarrow ab\sin^2 C + bc\sin^2 A + ca\sin^2 B \leq p^2$ (trong đó a, b, c là độ dài 3 cạnh ΔABC, p là nửa chu vi.)

Thí dụ 7

Cho tam giác ABC. Tìm GTNN của biểu thức

$$Q = \sqrt{3}\cos 2A + 2\cos 2B + 2\sqrt{3}\cos 2C$$

Lời giải

Viết lại $Q = 2\sqrt{3}\cos 2C + \sqrt{3}\cos 2A + 2\cos 2B$

$= 2xy\cos 2C + 2yz\cos 2A + 2zx\cos 2B$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2xy = 2\sqrt{3} \\ 2yz = \sqrt{3} \\ 2xz = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \sqrt{2} \\ y = \sqrt{\frac{3}{2}} \\ z = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 = 2 \\ y^2 = \frac{3}{2} \\ z^2 = \frac{1}{2} \end{cases}.$$ Theo (2): $Q \geq -(x^2 + y^2 + z^2) = -4$

Dấu đẳng thức có khi và chỉ khi $\frac{\sin 2A}{\sqrt{2}} = \frac{\sin 2B}{\sqrt{\frac{3}{2}}} = \frac{\sin 2C}{\frac{1}{\sqrt{2}}} \Rightarrow \begin{cases} A = 45^0 \\ B = 60^0 \\ C = 75^0 \end{cases}$

Vậy Q = –4 là GTNN của Q.

Thí dụ 8

Cho tam giác ABC. Chứng minh $Q = \sqrt{3}(\cos 2A - \cos 2C) + \cos 2B \leq \frac{5}{2}$

Lời giải

Cách 1: Viết lại

$$Q=\sqrt{3}\cos 2C-\sqrt{3}\cos 2A-\cos 2B = 2xy\cos 2C + 2yz\cos 2A + 2zx\cos 2B$$

$$\Rightarrow \begin{cases} xy=\dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ yz=-\dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ xz=-\dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-\dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ y=-\sqrt{\dfrac{3}{2}} \\ z=\dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$$ Theo (2) ta có $-Q\geq -(x^2+y^2+z^2)=-\dfrac{5}{2} \Leftrightarrow Q\leq \dfrac{5}{2}$

Dấu đẳng thức có khi và chỉ khi $\dfrac{\sin 2A}{-\dfrac{1}{\sqrt{2}}}=\dfrac{\sin 2B}{\sqrt{\dfrac{3}{2}}}=\dfrac{\sin 2C}{\dfrac{1}{\sqrt{2}}} \Rightarrow \begin{cases} A=15^0 \\ B=60^0 \\ C=105^0 \end{cases}$

Vậy GTLN của Q là $Q=\dfrac{5}{2}$.

(Chú ý $\sin 2A=\sin 210^0=\sin(180^0+30^0)=-\sin 30^0=-\dfrac{1}{2}$)

• Chú ý

Bất đẳng thức (2) chỉ cho chiều tìm giá trị nhỏ nhất. Khi gặp bài toán tìm giá trị lớn nhất, để áp dụng (2), cần đưa về tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức đối của nó.

Cách 2. Biến đổi

$Q=\sqrt{3}\,(\cos 2A-\cos 2C)+\cos 2B \Leftrightarrow Q=-2\sqrt{3}\sin(A+C)\sin(A-C)+1-2sn^2B$

$\Leftrightarrow 2Q=-4\sqrt{3}\sin B\sin(A-C)+2-4\sin^2B$

$\quad = 2+3\sin^2(A-C)-[2\sin B+\sqrt{3}\sin(A-C)]^2$

$\Rightarrow 2Q\leq 5 \Leftrightarrow Q\leq \dfrac{5}{2}$. (đpcm). Dấu đẳng thức có khi

$$\begin{cases} \sin^2(A-C)=1 \\ 2\sin B+\sqrt{3}\sin(A-C)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin(A-C)=-1 \\ \sin B=\dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \{A=15^0;\ B=60^0;\ C=105^0\}$$

§5. SỬ DỤNG ĐIỂM RƠI TRONG CÁC BẤT ĐẲNG THỨC CÔ–SI VÀ BUNHIACOPSKI

Định nghĩa

Mọi giá trị của biến cân bằng bất đẳng thức được gọi là điểm rơi của bất đẳng thức ấy.

Theo định nghĩa đó :

- Bất đẳng thức Cô–si $\frac{a_1+a_2+...+a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1a_2...a_n}$ có duy nhất một điểm rơi là $\bar{a} = \frac{a_1+a_2+...+a_n}{n} = \sqrt[n]{a_1a_2...a_n}$

- Bất đẳng thức Bunhiacopski

$$(a_1x_1+a_2x_2+...+a_nx_n)^2 \leq (a_1^2+a_2^2+...+a_n^2)(x_1^2+x_2^2+...+x_n^2)$$

có duy nhất một điểm rơi là $\varsigma = \frac{x_i}{a_i}$ (i=1, 2, ..., n)

Thí dụ 1

ΔABC có đặc điểm gì nếu : $tg^6\frac{A}{2} + tg^6\frac{B}{2} + tg^6\frac{C}{2} \leq \frac{1}{9}$ (1)

Lời giải

Để đơn giản cách viết đặt $a = tg\frac{A}{2}$, $b = tg\frac{B}{2}$, $c = tg\frac{C}{2}$.

- Trước hết ta chứng minh $a + b + c \geq \sqrt{3}$.

Dấu đẳng đẳng thức có khi và chỉ khi ΔABC đều. (2)

Thật vậy : Trong mọi tam giác ta có $\frac{B}{2} + \frac{C}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{A}{2}$

Suy ra : $tg\left(\frac{B}{2} + \frac{C}{2}\right) = \frac{1}{tg\frac{A}{2}} \Leftrightarrow \frac{tg\frac{B}{2} + tg\frac{C}{2}}{1 - tg\frac{A}{2}tg\frac{A}{2}} = \frac{1}{tg\frac{A}{2}}$

$\Leftrightarrow tg\frac{A}{2}tg\frac{B}{2} + tg\frac{B}{2}tg\frac{C}{2} + tg\frac{C}{2}tg\frac{A}{2} = 1$ hay $ab + bc + ca = 1$ (3)

Lại có $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca)$

$$= \frac{1}{2}[(a^2 + b^2) + (b^2 + c^2) + (c^2 + a^2)] + 2(ab + bc + ca)$$

$$\geq ab + bc + ca + 2(ab + bc + ca) = 3(ab + bc + ca) = 3$$

$\Rightarrow a + b + c \geq \sqrt{3}$.

Dấu đẳng thức có khi $a = b = c$ hay $tg\frac{A}{2} = tg\frac{B}{2} = tg\frac{C}{2} \Leftrightarrow$ ΔABC đều. **(đpcm)**

• Đến đây có các cách trình bày phần tiếp theo của lời giải như sau

> *(Do tính bình đẳng giữa các góc A, B, C trong bất đẳng thức (4) nên ta dự đoán dấu đẳng thức có khi ΔABC đều $\Leftrightarrow a^6 = b^6 = c^6 = \frac{1}{27} \Rightarrow \frac{1}{27}$ là điểm "rơi" trong bất đẳng thức Cô–si. Bởi thế ta có lời giải theo 2 cách như sau)*

Cách 1. Cân bằng biến với điểm rơi.

Do A, B, C là các góc trong tam giác nên $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$.

Theo Cô–si : $a^6 + \frac{1}{27}+\frac{1}{27}+\frac{1}{27}+\frac{1}{27}+\frac{1}{27} \geq 6\sqrt[6]{\frac{a^6}{27^5}} = \frac{2}{3}a\sqrt{3} \Leftrightarrow a^6 + \frac{5}{27} > \frac{2a}{3\sqrt{3}}$ (4)

Dấu đẳng thức có khi và chỉ khi $a^6 = \frac{1}{27} \Leftrightarrow a = \frac{1}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow A = 60^0$

Tương tự có $b^6 + \frac{5}{27} > \frac{2b}{3\sqrt{3}}$, $c^6 + \frac{5}{27} > \frac{2c}{3\sqrt{3}}$

Cộng vế theo vế các kết quả có : $a^6+b^6+c^6+\frac{5}{9} \geq \frac{2(a+b+c)}{3\sqrt{3}}$. (5)

Dấu đẳng thức có khi và chỉ khi $A = B = C = 60^0$

Từ (2), (5) suy ra $a^6 + b^6 + c^6 + \frac{5}{9} > \frac{2\sqrt{3}}{3\sqrt{3}} \Leftrightarrow a^6 + b^6 + c^6 \geq \frac{2}{3} - \frac{5}{9} = \frac{1}{9}$

Hay $a^6 + b^6 + c^6 \geq \frac{1}{9}$ (6)

Dấu đẳng thức có khi và chỉ khi ΔABC đều

Bởi có (6) nên (1) $\Leftrightarrow \Delta ABC$ đều

Chú ý

- Nếu trong bất đẳng thức Cô–si có p biến tham gia đánh giá, và kết quả khai căn tổng số mũ của các biến bằng k, khi đó ta nói là "*cân bằng bậc k cho p biến với điểm rơi*"
- Cách 1 trên đây là "*cân bằng bậc nhất cho một biến với điểm rơi*".
- Khi nói đến thuật ngữ "*cân bằng biến với điểm rơi*" là nói tới dùng điểm rơi của bất đẳng thức Cô-si.

Cách 2 : (Cân bằng bậc hai cho hai biến với điểm rơi)

Theo bất đẳng thức Cô–si : $a^6 + b^6 + \frac{1}{27}+\frac{1}{27}+\frac{1}{27}+\frac{1}{27} > 6\sqrt[6]{\frac{a^6b^6}{27^4}} = \frac{2}{3}ab$

$\Leftrightarrow a^6 + b^6 + \frac{4}{27} \geq \frac{2}{3}ab$ Dấu đẳng thức có khi và chỉ khi $a^6 = b^6 = \frac{1}{27}$

$\Leftrightarrow a = b = \frac{1}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow \Delta ABC$ đều.

Tương tự $b^6 + c^6 + \frac{4}{27} \geq \frac{2}{3}bc$, $c^6 + a^6 + \frac{4}{27} \geq \frac{2}{3}ca$.

Dấu đẳng thức có khi và chỉ khi ΔABC đều

Cộng vế theo vế các kết quả trên có :

$$2(a^6 + b^6 + c^6) + \frac{12}{27} > \frac{2}{3}(ab + bc + ca)$$

$$\Leftrightarrow a^6 + b^6 + c^6 + \frac{2}{9} > \frac{1}{3}(ab + bc + ca) \qquad (10)$$

Theo (2) ab + bc + ca = 1, thay vào (10) có $(a^6 + b^6 + c^6) + \frac{2}{9} > \frac{1}{3}$

$\Leftrightarrow a^6 + b^6 + c^6 > \frac{1}{3} - \frac{2}{9} = \frac{1}{9}$. **Dấu đẳng thức có khi và chỉ khi** ΔABC đều. (11)

Bởi có (11) nên $(4) \Leftrightarrow a^6+b^6+c^6=\frac{1}{9} \Leftrightarrow$ **ΔABC đều**

Chú ý

Bạn cũng có thể cân bằng **bậc hai cho một biến với điểm** rơi sau đó dùng đánh giá $a^2 + b^2 + c^2 > 1$

> **Thí dụ 2. (ĐHQGHN, khối A, năm học 2001-2002)**
>
> **Cho a, b, c dương thay đổi. Chứng minh :**
>
> $$\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{3}{2}} + \left(\frac{b}{c}\right)^{\frac{3}{2}} + \left(\frac{c}{a}\right)^{\frac{3}{2}} > \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}.$$

Lời giải

Do tính bình đẳng của $\frac{a}{b}, \frac{b}{c}, \frac{c}{a}$ *có mặt trong **bất đẳng** thức nên ta dự đoán dấu đẳng thức có khi* $\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{a} \Leftrightarrow a=b=c$ *dẫn tới* $\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{a} = 1$ *Suy ra 1 là điểm rơi của bất đẳng thức Cô–si. Bởi vậy có lời giải cân bằng bậc nhất cho một biến với điểm rơi như sau*

- **Áp dụng BĐT Cô-si ta có** $\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{3}{2}} + \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{3}{2}} + 1 > 3\frac{a}{b} \Leftrightarrow \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{3}{2}} > \frac{3}{2}\frac{a}{b} - \frac{1}{2}$

Dấu đẳng thức có khi và chỉ khi $\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{3}{2}} = 1 \Leftrightarrow a = b$

Tương tự với các số còn lại suy ra :

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{3}{2}} + \left(\frac{b}{c}\right)^{\frac{3}{2}} + \left(\frac{c}{a}\right)^{\frac{3}{2}} > \frac{3}{2}\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}\right) - \frac{3}{2}\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{3}{2}} + \left(\frac{b}{c}\right)^{\frac{3}{2}} + \left(\frac{c}{a}\right)^{\frac{3}{2}}$$

$$> \frac{3}{2}\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}\right) - \frac{3}{2} = \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}\right) - \frac{3}{2}$$

Theo Cô-si $\frac{1}{2}\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\right) \ge \frac{3}{2}\sqrt[3]{\frac{a}{b}.\frac{b}{c}.\frac{c}{a}} = \frac{3}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{2}\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\right) - \frac{3}{2} \ge 0$

Dấu đẳng thức có khi và chỉ khi $\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{a} \Leftrightarrow a = b = c$

Do vậy $\left(\frac{a}{b}\right)^3 + \left(\frac{b}{c}\right)^3 + \left(\frac{c}{a}\right)^3 \ge \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}$ (đpcm)

Chú ý.

Đằng sau các biến $x_1=\frac{a}{b}$, $x_2=\frac{b}{c}$, $x_3=\frac{c}{a}$ là ngầm ẩn giả thiết $x_1x_2x_3=1$ (const)

Thí dụ 3
Cho x, y, z là các số thực thoả mãn $xy + yz + zx = 15$
Tìm giá trị nhỏ nhất của $Q = x^4 + y^4 + z^4$

Lời giải

(Do vai trò bình đẳng của x, y, z nên ta dự đoán dấu đẳng thức có khi $x=y=z$ $\Rightarrow x^2=y^2=z^2=5$. Suy ra 5 là điểm "rơi" trong bất đẳng thức Cô-si. Bởi vậy có lời giải cân bằng bậc hai cho một biến với điểm rơi như sau.)

Theo Cô-si $x^4 + y^4 + 25 + 25 \ge 4\sqrt[4]{x^4y^4 25.25} = 4.5|xy| \ge 20xy$

$\Leftrightarrow x^4+y^4+50 \ge 20xy$ (1)

Dấu đẳng thức có khi và chỉ khi $\begin{cases} x^4 = y^4 = 25 \\ xy \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = y = \sqrt{5} \\ x = y = -\sqrt{5} \end{array}\right.$

Tương tự $y^4 + z^4 + 50 \ge 20yz$, (2)

$z^4 + x^4 + 50 \ge 20zx$ (3)

Cộng theo từng vế các bất đẳng thức (1), (2) và (3) ta có:

$2Q + 150 \ge 20(xy + yz + zx) \Rightarrow 2Q+150 \ge 20.15 \Leftrightarrow Q \ge 300.$

Dấu đẳng thức có khi và chỉ khi $\left[\begin{array}{l} x = y = z = \sqrt{5} \\ x = y = z = -\sqrt{5} \end{array}\right.$. Vậy MinQ = 300.

Bài toán 1
Cho các số thực dương a_i($I = 1, 2, \ldots, k$) thoả mãn $a_1 a_2 \ldots a_k = 1$. (1)
Chứng minh rằng $\forall m, n \in \mathbf{N}^*$: $m > n$ ta có

$$a_1^m + a_2^m + \ldots + a_k^m \ge a_1^n + a_2^n + \ldots + a_k^n$$

Lời giải

(Do tính bình đẳng của các a_i ($i=1, 2, \ldots, k$) trong bất đẳng thức nên ta dự đoán dấu đẳng thức có khi $a_i = 1, \forall a_i$. Suy ra 1 là điểm "rơi" trong bất đẳng

thức Cô-si. Bởi vậy có lời giải cân bằng bậc n cho một biến với 1 như sau)

- Áp dụng bất đẳng thức Cô-si cho m số trong **đó có n số** a_i^m, **(m – n)** số 1 ta có

$$a_i^m + a_i^m + \dots + a_i^m + 1 + 1 + \dots + 1 \ge m\sqrt[m]{(a_i^m)^n.1^{m-n}} = m a_i^k$$

$\Leftrightarrow n a_i^m + (m - n) \ge m a_i^n$ (2)

- Áp dụng (2) cho k các số thực a_i^n **(i=1,2,...k) rồi cộng tất cả các bất đẳng** thức thu được ta có $n(a_1^m + a_2^m + \dots + a_k^m) + k(m - n) \ge m(a_1^n + a_2^n + \dots + a_k^n)$

$\Leftrightarrow n(a_1^m + a_2^m + \dots + a_k^m) + k(m - n) \ge n(a_1^n + a_2^n + \dots + a_k^n) + (m - n)(a_1^n + a_2^n + \dots + a_k^n)$

Dấu đẳng thức có khi và chỉ khi $a_i = 1, \forall a_i$ (3)

- Áp dụng BĐT Cô-si cho k số a_i^n:

$$(m - n)(a_1^n + a_2^n + \dots + a_k^n) \ge (m - n)k\sqrt[k]{a_1^n a_2^n \dots a_k^n}$$

$$= (m - n)k\sqrt[k]{(a_1 a_2 \dots a_k)^n} = (m - n)k$$

Dấu đẳng thức có khi và chỉ khi $a_i = a_j, \forall i, \forall j$ (4)

- Thay (4) vào (3) có :

$$n(a_1^m + a_2^m + \dots + a_k^m) + k(m - n) \ge n(a_1^n + a_2^n + \dots + a_k^n) + (m - n)k$$

$\Leftrightarrow a_1^m + a_2^m + \dots + a_k^m \ge a_1^n + a_2^n + \dots + a_k^n$. Dấu **đẳng thức có khi** và chỉ khi $a_i = 1, \forall a_i$.

(đpcm)

Chú ý 1

Nếu thay $\prod_{1}^{k} a_i = 1$ bởi $\sum_{1}^{k} a_i = k > 0$, kết quả **bất đẳng thức không thay đổi**

Chú ý 2

Ngược lại nếu m, n là các số tự nhiên và a_i **(i=1, 2,..., k)** là các số thực dương thoả mãn $\begin{cases} a_1 a_2 \dots a_k = 1 \\ a_1^m + a_2^m + \dots + a_k^m = a_1^n + a_2^n + \dots + a_k^n \end{cases}$ **thì $a_i=1$, ($\forall i=1,\dots, k$.)**

Chúng ta sử dụng điều này để giải một số bài toán.

Thí dụ *(Tạp chí Toán học & Tuổi trẻ* số 332 **tháng 8/2004**. *Bài T3/322*)

Có bốn viên bi mà tổng khối lượng của từng **cặp viên bi là a, b, c, d, e, f và** thoả mãn **$a + b + c + d + e + f = a^3 + b^3 + c^3 + d^3 + e^3 + f^3 = 6$ (đvkl)** (3)

Tìm khối lượng của các viên bi đó.

Lời giải

Từ $a + b + c + d + e + f = a^3 + b^3 + c^3 + d^3 + e^3 + f^3 = 6$ *(tổng các số không đổi (chú ý 1) và tổng các luỹ thừa bậc 3 của chúng* ***bằngt tổng cả chúng****)* suy ra

$a = b = c = d = e = f = 2$. Gọi khối lượng của **các viên bi** là x, y, z, t. Từ giả thiết suy ra $x + y = y + z = z + t = t + x = 2 \Leftrightarrow x = y = z = t = 1$.

Vậy bốn viên bi có khối lượng bằng nhau và **bằng 1 (đvkl)**

Bài toán 2

Cho k số thực dương a_i (i=1, 2,..., k) thoả mãn: $a_1 + a_1 + ... + a_k = k$ (const) (1)

Chứng minh với mọi số tự nhiên m, n (m > n) luôn có

$$\frac{a_1^m}{a_2^n} + \frac{a_2^m}{a_3^n} + ... + \frac{a_k^m}{a_1^n} \ge a_1 + a_2 + ... + a_k$$

Lời giải

(Do tính bình đẳng của các a_i (i=1, 2,..., k) trong bất đẳng thức nên ta dự đoán dấu đẳng thức có khi $a_i = 1, \forall a_i$. Suy ra 1 là điểm "rơi" trong bất đẳng thức Cô–si. Bởi vậy có lời giải cân bằng bậc nhất hai biến với điểm rơi như sau)

Theo Cô–si : $\frac{a_1^m}{a_2^n} + \underbrace{a_2 + a_2 + ... + a_2}_{n \text{ số}} + \underbrace{1 + 1 + ... + 1}_{(m-n-1) \text{ số}} \ge m\sqrt[m]{\frac{a_1^m}{a_2^n} a_2^n 1^{(m-n-1)}} = ma_1$

hay $\frac{a_1^m}{a_2^n} + na_2 + (m - n - 1) \ge ma_1 \Leftrightarrow \frac{a_1^m}{a_2^n} \ge ma_1 - na_2 - (m - n - 1)$

Tương tự $\frac{a_2^m}{a_3^n} \ge ma_2 - na_3 - (m-n)+1; ...; \frac{a_k^m}{a_1^n} \ge ma_k - na_1 - (m - n - 1)$

Cộng k BĐT thu được ở trên có

$$\frac{a_1^m}{a_2^n} + \frac{a_2^m}{a_3^n} + ... + \frac{a_k^m}{a_1^n} \ge (m - n)(a_1 + a_2 + ... + a_k) - k(m - n - 1)$$

$$\Leftrightarrow \frac{a_1^m}{a_2^n} + \frac{a_2^m}{a_3^n} + ... + \frac{a_k^m}{a_1^n} \ge (a_1 + a_2 + ... + a_k) + (m - n - 1)\underbrace{(a_1 + a_2 + ... + a_k)}_{(1)} - k(m - n - 1) \quad (2)$$

Thay (1) vào (2) có :

$$(2) \Leftrightarrow \frac{a_1^m}{a_2^n} + \frac{a_2^m}{a_3^n} + ... + \frac{a_k^m}{a_1^n} \ge (a_1 + a_2 + ... + a_k) + (m - n - 1)k - k(m - n - 1)$$

$$\Leftrightarrow \frac{a_1^m}{a_2^n} + \frac{a_2^m}{a_3^n} + ... + \frac{a_k^m}{a_1^n} \ge (a_1 + a_2 + ... + a_k) \text{ (đpcm)}$$

Dấu đẳng thức có khi $\frac{a_i^m}{a_j^n} = a_i = 1\ \forall i,j \in \{1,2,...k\} \Leftrightarrow a_1 = a_2 = ... = a_k = 1$

Chú ý : *Kết quả không thay đổi nếu thay thế giả thiết $a_1 + a_2 + ... + a_k = k$ bởi $a_1 a_2 ... a_k = 1$*

Hệ quả

Nếu k số thực dương a_i (i=1, 2,..., k) thoả: $a_1 + a_1 + ... + a_k = c$ (const) (1)

thì với mọi số tự nhiên m, n (m > n) luôn có : $\frac{a_1^m}{a_2^n} + \frac{a_2^m}{a_3^n} + ... + \frac{a_k^m}{a_1^n} \ge k\left(\frac{c}{k}\right)^{m-n}$

(Hướng dẫn chứng minh : Đặt $b_1 = \frac{ka_1}{c}, b_2 = \frac{ka_2}{c}, ..., b_k = \frac{ka_k}{c}$)

Chú ý

Ta thường gặp những bài toán là trường hợp riêng của hệ quả. Chẳng hạn:

1) Cho x, y, z là các số thực dương thoả $x + y + z = c$ và m, n ($m > n$) là các số tự nhiên. Chứng minh $\frac{x^m}{y^n} + \frac{y^m}{z^n} + \frac{z^m}{x^n} \ge 3.\left(\frac{c}{3}\right)^{m-n}$. *(Sử dụng hệ quả với với k=3)*

2) Cho các số thực dương x, y, z thoả $x + y + z = 2001$.

Tìm GTNN của $Q=\frac{x^{20}}{y^{11}} + \frac{y^{20}}{z^{11}} + \frac{z^{20}}{x^{11}}$ (Bài T3/293, Toán học&Tuổi trẻ số 298 tháng 4/2002) *(Sử dụng hệ quả với với k=3, m=20, n=11, c=2001)*

3) Cho các số thực dương x, y, z thoả $x + y + z \ge 1$. Chứng minh

$$\frac{x^5}{y^4} + \frac{y^5}{z^4} + \frac{z^5}{x^4} \ge 1$$

(Sử dụng hệ quả với với k= 3, m = 5, n = 4, *c = 1)*

Bài toán 3

Cho k số thực dương a_i($i=1, 2, ..., k$). Chứng minh với mọi số tự nhiên m, n luôn có :

$$\frac{a_1^m}{a_2^n} + \frac{a_2^m}{a_3^n} + ... + \frac{a_k^m}{a_1^n} \ge a_1^{m-n} + a_2^{m-n} + ... + a_k^{m-n} \quad (1)$$

Lời giải

Trường hợp 1: m = n, đẳng thức (1) hiển nhiên đúng.

Trường hợp 2 : $m > n$, đặt $m = n + p$, $p \in N^*$. Ta có $\frac{a_1^m}{a_2^n} = \frac{a_1^{n+p}}{a_2^n}$

Theo Cô si :

$$\underbrace{\frac{a_1^{n+p}}{a_2^n} + \frac{a_1^{n+p}}{a_2^n} + ... + \frac{a_1^{n+p}}{a_2^n}}_{p \text{ số hạng}} + \underbrace{a_2^p + a_2^p + ... + a_2^p}_{n \text{ số hạng}} \ge (n + p)\sqrt[n+p]{\frac{a_1^{p(n+p)}}{a_2^{np}}.a_2^{np}} = (n+p)\,a_1^p$$

hay $p\frac{a_1^{n+p}}{a_2^n} + n a_2^p \ge (n + p)a_1^p \Leftrightarrow p\frac{a_1^{n+p}}{a_2^n} \ge (n + p)\,a_1^p - n a_2^p$

Dấu đẳng thức có khi và chỉ khi $\frac{a_1^{n+p}}{a_2^n} = a_2^p \Leftrightarrow a_1 = a_2$

Tương tự rồi cộng k bất đẳng thức thu được ta có :

$$p\left(\frac{a_1^{n+p}}{a_2^n} + \frac{a_2^{n+p}}{a_3^n} + ... + \frac{a_k^{n+p}}{a_1^n}\right) \ge (n+p)(a_1^p + a_2^p + ... + a_k^p) - n(a_1^p + a_2^p + ... + a_k^p)$$

$$\Leftrightarrow p\left(\frac{a_1^{n+p}}{a_2^n} + \frac{a_2^{n+p}}{a_3^n} + ... + \frac{a_k^{n+p}}{a_1^n}\right) \ge p(a_1^p + a_2^p + ... + a_k^p)$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{\frac{a_1^{n+p}}{a_2^n} + \frac{a_1^{n+p}}{a_2^n} + \ldots + \frac{a_1^{n+p}}{a_2^n}}_{p \text{ số hạng}} \geq a_1^p + a_2^p + \ldots + a_k^p$$

$$\Leftrightarrow \frac{a_1^m}{a_2^n} + \frac{a_2^m}{a_3^n} + \ldots + \frac{a_k^m}{a_1^n} \geq a_1^{m-n} + a_2^{m-n} + \ldots + a_k^{m-n}$$

Dấu đẳng thức có khi và chỉ khi $a_1 = a_2 = \ldots = a_k$.

Trường hợp 3: $m < n$, đặt $a_i = \frac{1}{b_i}$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$, sẽ có $\frac{a_i^m}{a_j^n} = \frac{b_j^n}{b_i^m}$ $\forall (i, j) \in \{1, \ldots, k\}$

Theo trường hợp 1: $\frac{b_1^n}{b_2^m} + \frac{b_2^n}{b_3^m} + \ldots + \frac{b_k^n}{b_1^m} \geq b_1^{n-m} + b_2^{n-m} + \ldots + b_k^{n-m}$

$$\Leftrightarrow \frac{b_1^n}{b_2^m} + \frac{b_2^n}{b_3^m} + \ldots + \frac{b_k^n}{b_1^m} \geq \frac{1}{b_1^{n-m}} + \frac{1}{b_2^{n-m}} + \ldots + \frac{1}{b_k^{n-m}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{a_1^m}{a_2^n} + \frac{a_2^m}{a_3^n} + \ldots + \frac{a_k^m}{a_1^n} \geq a_1^{m-n} + a_2^{m-n} + \ldots + a_k^{m-n}$$

- Vậy trong mọi trường hợp, đẳng thức (1) luôn có

$$\frac{a_1^m}{a_2^n} + \frac{a_2^m}{a_3^n} + \ldots + \frac{a_k^m}{a_1^n} \geq a_1^{m-n} + a_2^{m-n} + \ldots + a_k^{m-n} \text{ (đpcm)}$$

Chẳng hạn : Cho a, b, c, d là các số thực dương luôn có

$$\frac{a^2}{b^5} + \frac{b^2}{c^5} + \frac{c^2}{d^5} + \frac{d^2}{a^5} \geq \frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3} + \frac{1}{c^3} + \frac{1}{d^3}$$

(Đó là một trường hợp của bất đẳng thức (*) với $m = 2$, $n = 5$, $k = 4$)

Thí dụ 7

Cho các số thực dương x, y, z thoả mãn $x + y + z \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}$. Chứng minh :

$$\sqrt{x^2 + \frac{1}{x^2}} + \sqrt{y^2 + \frac{1}{y^2}} + \sqrt{z^2 + \frac{1}{z^2}} \geq \frac{5\sqrt{3}}{2}$$

Lời giải

Cách 1. Theo Bunhiacopski $\sqrt{(3^2 + 4^2)(x^2 + \frac{1}{x^2})} \geq 3x + \frac{4}{x} = 16\left(\frac{x}{3} + \frac{1}{4x}\right) - \frac{7x}{3}$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x^2 + \frac{1}{x^2}} \geq \frac{16}{5}\left(\frac{x}{3} + \frac{1}{4x}\right) - \frac{7x}{15} \qquad (1)$$

Theo Cô si : $\frac{x}{3} + \frac{1}{4x} \geq 2\sqrt{\frac{x}{3.4x}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ (2)

Thay (2) vào (1) có : $\sqrt{x^2 + \frac{1}{x^2}} \geq \frac{16.\sqrt{3}}{15} - \frac{7x}{15}$

Tương tự ta cũng có: $\sqrt{y^2+\frac{1}{y^2}} \ge \frac{16\sqrt{3}}{15}-\frac{7y}{15}$;

$$\sqrt{z^2+\frac{1}{z^2}} \ge \frac{16\sqrt{3}}{15}-\frac{7z}{15}$$

Cộng theo từng vế các bất cùng chiều trên ta có:

$$Q=\sqrt{x^2+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{y^2+\frac{1}{y^2}}+\sqrt{z^2+\frac{1}{z^2}} \ge 3.\frac{16\sqrt{3}}{15}-\frac{7}{15}(x+y+z)$$

$$\Rightarrow Q \ge \frac{16\sqrt{3}}{5}-\frac{7.3\sqrt{3}}{15.2}=\frac{5\sqrt{3}}{2} \text{ (đpcm)}$$

Dấu đẳng thức trong tất cả các đánh giá trên đồng thời xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases} \frac{x}{3}=\frac{1}{4x} \\ x+y+z=\frac{3\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x=\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Cách 2 (Co giãn biến để lọt đúng điểm điểm rơi) - Tiếp nối từ (*).

Áp dụng Côsi cho 25 số gồm 9 số $\frac{x^2}{9}$ và 16 số $\frac{1}{16x^2}$ ta có

$$x^2+\frac{1}{x^2}=\left(\frac{x^2}{9}+\frac{x^2}{9}+\dots+\frac{x^2}{9}\right)+\left(\frac{1}{16x^2}+\frac{1}{16x^2}+\dots+\frac{1}{16x^2}\right) \ge 25\sqrt[25]{\left(\frac{x}{3}\right)^{18}\left(\frac{1}{4x}\right)^{32}}$$

$$\Rightarrow \sqrt{x^2+\frac{1}{x^2}} \ge 5\sqrt[25]{\left(\frac{x}{3}\right)^{9}\left(\frac{1}{4x}\right)^{16}}=\frac{5}{2\sqrt[25]{3^9 2^7}}\cdot\frac{1}{\sqrt[25]{x^7}}$$

Tương tự ta cũng có $\sqrt{y^2+\frac{1}{y^2}} \ge \frac{5}{2\sqrt[25]{3^9 2^7}}\cdot\frac{1}{\sqrt[25]{y^7}}$, $\sqrt{z^2+\frac{1}{z^2}} \ge \frac{5}{2\sqrt[25]{3^9 2^7}}\cdot\frac{1}{\sqrt[25]{z^7}}$

$$\Rightarrow Q \ge \frac{5}{2\sqrt[25]{3^9 2^7}}\left(\frac{1}{\sqrt[25]{x}}+\frac{1}{\sqrt[25]{y}}+\frac{1}{\sqrt[25]{z}}\right) \ge \frac{5}{2\sqrt[25]{3^9 2^7}}\cdot\frac{3}{\sqrt[25]{\left(\sqrt[3]{xyz}\right)^7}}$$

$$=\frac{5}{2\sqrt[25]{3^9 2^7}}\cdot\frac{3}{\sqrt[25]{(x+y+z)^7}} \ge \frac{5}{2\sqrt[25]{3^9 2^7}}\cdot\frac{3}{\sqrt[25]{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^7}}=\frac{5.3}{2\sqrt[25]{3^{\frac{25}{2}}}}=\frac{5\sqrt{3}}{2} \quad (2)$$

Dấu đẳng thức trong tất cả các đánh giá trên đồng thời xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases} \frac{x}{3}=\frac{1}{4x} \\ x+y+z=\frac{3\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x=\frac{\sqrt{3}}{2}.$$ Vậy $Q \ge \frac{5\sqrt{3}}{2}$ (đpcm).

Lời bình 1

Sự mách bảo nào dẫn ra

+ *cặp số (9; 16) để áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopski,*

+ *số 16 và sự biến đổi* $3x + \frac{4}{x} = \frac{16}{5}\left(\frac{x}{3} + \frac{1}{4x}\right) - \frac{7x}{15}$

Trả lời.

• *Do* $x + y + z \le \frac{3\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow -(x + y + z) \ge -\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

Kinh nghiệm bảo ta so sánh Q với $-(x+y+z)$ *hoặc* $\frac{1}{x+y+z}$ *hoặc* $\frac{1}{xyz}$.

• *Do tính bình đẳng của x, y, z trong biểu thức Q cũng như trong giả thiết*

$\Rightarrow$ *dự đoán min Q đạt được khi* $x=y=z=\frac{\sqrt{3}}{2}$ *(điểm rơi của bất đẳng thức)*

• *Với mọi a, b∈R ta có* $\sqrt{(a^2 + b^2)\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)} \ge ax + \frac{b}{x}$.

Dấu đẳng thức có khi và chỉ khi $\frac{x}{a} = \frac{1}{bx} \Leftrightarrow x^2 = \frac{a}{b}$ *Với* $x=\frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \frac{a}{b} = \frac{3}{4}$.

Chọn a = 3, *ta có cặp số* (9; 16) *trong lời giải trên.*

Bất đẳng thức Bunhiacopski *(một công cụ ưu việt) đưa biểu thức dạng tổng các bình phương thoát khỏi căn thức bậc hai dẫn tới biểu thức hữu tỷ* $3x+\frac{4}{x}$

• *Với Cô–si biểu thức* $3x+\frac{4}{x}$ *lại có thể so sánh được với* x *hoặc* $\frac{1}{x}$.

Để duy trì đúng điểm rơi đã định $x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ *ta khai triển* $3x + \frac{4}{x}$ *theo* $\frac{x}{3} + \frac{1}{4x}$.

Đến đây có hai hướng khai triển :

Hướng 1: Triệt tiêu hạng tử $\frac{1}{x}$.

Muốn vậy xem $\frac{4}{x} = 16.\frac{1}{4x}$ *Điều này giải thích sự hiện hữu của số 16 và phép biến đổi* $3x + \frac{4}{x} = 16\left(\frac{x}{3} + \frac{1}{4x}\right) - \frac{7x}{3}$. *Đồng hành với triệt tiêu hạng tử* $\frac{1}{x}$ *là sự có mặt của* $-\frac{7x}{3}$. *Cái khó (điểm xoáy) của bài toán–chiều của bất đẳng thức* $x + y + z \le \frac{3\sqrt{3}}{2}$ *không thuận với chiều đánh giá tìm GTNN được tháo gỡ.*

Hướng 2 : Triệt tiêu hạng tử x.

Muốn vậy xem $3x = 9\frac{x}{3}$ và biến đổi $3x+\frac{4}{x}=9\left(\frac{x}{3} + \frac{1}{4x}\right)+\frac{7}{4x}$

$\Rightarrow \sqrt{x^2 + \frac{1}{x^2}} \ge \frac{3\sqrt{3}}{5} + \frac{7}{20x}$. Phép biến đổi sẽ dẫn tới

$$Q \ge \frac{9\sqrt{3}}{5} + \frac{7}{20}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) \ge \frac{9\sqrt{3}}{5} + \frac{7}{20} \cdot \frac{(1+1+1)^2}{x+y+z}$$

$$\Rightarrow Q \ge \frac{9\sqrt{3}}{5} + \frac{7}{20} \cdot \frac{3.3}{\frac{3\sqrt{3}}{2}} = \frac{9\sqrt{3}}{5} + \frac{7\sqrt{3}}{10} = \frac{5\sqrt{3}}{2}$$

Thí dụ 8

Cho các số thực dương x, y, z **thỏa mãn** $x + y + z < 2$.

Tìm GTNN của **biểu thức** $Q = \sqrt{4x^2 + \frac{1}{x^2}} + \sqrt{4y^2 + \frac{1}{y^2}} + \sqrt{4x^2 + \frac{1}{z^2}}$

Lời giải

Cách 1. (Sử dụng điểm rơi của bất đẳng thức Bunhiacopski)

Theo Bunhacopski : $\sqrt{(8^2 + 9^2)\left(4x^2 + \frac{1}{x^2}\right)} \ge 16x + \frac{9}{x} = 81\left(\frac{x}{4} + \frac{1}{9x}\right) - \frac{17x}{4}$ (1)

Theo Cô si : $\frac{x}{4} + \frac{1}{9x} \ge 2\sqrt{\frac{x.1}{4.9.x}} = \frac{1}{3}$ (2)

Thay (2) vào (1) có : $\sqrt{145\left(4x^2 + \frac{1}{x^2}\right)} \ge 27 - \frac{17x}{4}$.

Tương tự ta cũng có : $\sqrt{145\left(4y^2 + \frac{1}{y^2}\right)} \ge 27 - \frac{17y}{4}$

$$\sqrt{145\left(4z^2 + \frac{1}{z^2}\right)} \ge 27 - \frac{17z}{4}$$

Cộng các bất đẳng thức cùng **chiều trên ta có**

$$\sqrt{145\left(4x^2 + \frac{1}{x^2}\right)} + \sqrt{145\left(4y^2 + \frac{1}{y^2}\right)} + \sqrt{145\left(4z^2 + \frac{1}{z^2}\right)}$$

$$\ge 3.27 - \frac{17}{4}(x + y + z) \ge 81 - \frac{17}{2} = \frac{145}{2} \text{ (do } x + y + z \le 2\text{)}$$

hay $\sqrt{145}\, Q \ge \frac{145}{2} \Leftrightarrow Q \ge \frac{\sqrt{145}}{2}$

Rõ ràng $x = y = z = \frac{2}{3}$ là **điểm rơi chung** của tất cả các bất đẳng thức tham gia đánh giá ở trên. Vậy $\min Q = \frac{\sqrt{145}}{2}$

Cách 2. (Co giãn biến để lọt đúng điểm rơi)

Áp dụng bất đẳng thức Cô si cho 145 số gồm 64 số $\frac{x^2}{16}$ và 81 số $\frac{1}{81x^2}$ ta có

$$4x^2+\frac{1}{x^2}=\underbrace{\left(\frac{x^2}{16}+\frac{x^2}{16}+\ldots+\frac{x^2}{16}\right)}_{64\text{ số}}+\underbrace{\left(\frac{1}{81x^2}+\frac{1}{81x^2}+\ldots+\frac{1}{81x^2}\right)}_{81\text{ số}}$$

$$\geq 145\sqrt[145]{\left(\frac{x}{4}\right)^{128}\left(\frac{1}{9x}\right)^{162}}=\frac{145}{\sqrt[145]{4^{128}9^{162}x^{34}}}$$

$$\Rightarrow \sqrt{4x^2+\frac{1}{x^2}}\geq\frac{\sqrt{145}}{\sqrt[145]{2^{128}3^{162}x^{17}}}\Rightarrow \sqrt{4x^2+\frac{1}{x^2}}\geq\frac{\sqrt{145}}{3.\sqrt[145]{2^{128}(3x)^{17}}}$$

Tương tự ta có $\sqrt{4y^2+\frac{1}{y^2}}\geq\frac{\sqrt{145}}{3.\sqrt[145]{2^{128}(3y)^{17}}}$;

$$\sqrt{4z^2+\frac{1}{z^2}}\geq\frac{\sqrt{145}}{3.\sqrt[145]{2^{128}(3z)^{17}}}$$

Cộng theo từng vế ba bất đẳng thức cùng chiều trên ta có

$$Q\geq\frac{\sqrt{145}}{3.\sqrt[145]{2^{128}}}\left(\frac{1}{\sqrt[145]{(3x)^{17}}}+\frac{1}{\sqrt[145]{(3y)^{17}}}+\frac{1}{\sqrt[145]{(3z)^{17}}}\right)\geq\frac{\sqrt{145}}{\sqrt[145]{2^{128}\left(3\sqrt[3]{xyz}\right)^{17}}}$$

$$\geq\frac{\sqrt{145}}{\sqrt[145]{2^{128}(x+y+z)^{17}}}\geq\frac{\sqrt{145}}{\sqrt[145]{2^{128}2^{17}}}=\frac{\sqrt{145}}{2}\Rightarrow Q\geq\frac{\sqrt{145}}{2}$$

Dấu đẳng thức trong tất cả các bất đẳng thức ở trên có khi và chỉ khi $x=y=z=\frac{2}{3}$.

Bởi vậy $Q=\frac{\sqrt{145}}{2}$ là GTNN của Q.

Lời bình 2

Bài toán trình bày được bằng phương pháp đánh giá theo bất đẳng thức Bunhiacopski thì cũng đánh giá được theo bất đẳng thức $|\vec{u}|.|\vec{v}|\geq\vec{u}.\vec{v}$ ***. (Bạn đọc theo dõi cách 3)***

Cách 3 (Toạ độ vectơ):

Trong mặt phẳng toạ độ, xét các vectơ $\vec{a}=\left(2x;\frac{1}{x}\right)$, $\vec{b}=\left(2y;\frac{1}{y}\right)$, $\vec{c}=\left(2z;\frac{1}{z}\right)$

Với mọi vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ luôn có $|\vec{a}|+|\vec{b}|+|\vec{c}|\geq|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}|$ hay

$$Q\geq\sqrt{4(x+y+z)^2+\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)^2}$$

(Dấu đẳng thức có khi và chỉ khi $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ cùng hướng)

Theo Cô - si ta có $Q^2 = 4(x+y+z)^2 + \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right)^2 \geq 9\left(4\sqrt[3]{(xyz)^2} + \frac{1}{\sqrt[3]{(xyz)^2}}\right)$

$= \left(36\sqrt[3]{(xyz)^2} + \frac{64}{9\sqrt[3]{(xyz)^2}}\right) + \frac{17}{\left(3\sqrt[3]{xyz}\right)^2} \geq 32 + \frac{17}{(x+y+z)^2} = 32 + \frac{17}{4} = \frac{145}{4}$

$\Rightarrow Q \geq \frac{\sqrt{145}}{2}$. Dấu đẳng thức trong các đánh giá trên đồng thời có khi và chỉ khi

$x = y = z = \frac{2}{3}$. Vậy $Q = \frac{\sqrt{145}}{2}$ là GTNN của Q

Thí dụ 9 : (ĐHQG Hà Nội, khối D, năm học 2000-2001)

Cho a, b, c là các số thực dương có ab + bc + ca = abc. Chứng minh :

$$\frac{\sqrt{b^2 + 2a^2}}{ab} + \frac{\sqrt{c^2 + 2b^2}}{bc} + \frac{\sqrt{a^2 + 2c^2}}{ca} \geq \sqrt{3}$$

Lời giải

Cách 1: Viết lại (1) <=> $Q = \sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{2}{b^2}} + \sqrt{\frac{1}{b^2} + \frac{2}{c^2}} + \sqrt{\frac{1}{c^2} + \frac{2}{a^2}}$

Theo Bunhiacopski ta có $\sqrt{(1+2)\left[\left(\frac{1}{a}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{b}\right)^2\right]} \geq \frac{1}{a} + \frac{2}{b}$

Hay là $\sqrt{3}\sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{2}{b^2}} \geq \frac{1}{a} + \frac{2}{b} <=> \sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{2}{b^2}} \geq \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{1}{a} + \frac{2}{b}\right)$

Dấu đẳng thức có khi và chỉ khi $\frac{1}{1.a} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}b} <=> a = b$

Tương tự : $\sqrt{\frac{1}{b^2} + \frac{2}{c^2}} \geq \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{1}{b} + \frac{2}{c}\right), \sqrt{\frac{1}{c^2} + \frac{2}{a^2}} \geq \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{1}{c} + \frac{2}{a}\right)$

Cộng theo từng vế các bất đẳng thức trên ta có:

$$Q \geq \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{1}{a} + \frac{2}{b}\right) + \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{1}{b} + \frac{2}{c}\right) + \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{1}{c} + \frac{2}{a}\right) = \sqrt{3}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)$$

$$= \frac{\sqrt{3}(ab + bc + ca)}{abc} = \frac{\sqrt{3}abc}{abc} = \sqrt{3}$$

Dấu đẳng thức có khi và chỉ khi $\begin{cases} a = b = c \\ ab + bc + ca = abc \end{cases} <=> a = b = c = 3$

Vậy min$Q = \sqrt{3}$ (đpcm)

Lời bình.

Căn nguyên nào dẫn ra cặp số $(1;\sqrt{2})$ để áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopski?
Trả lời

- *Từ giả thiết* $ab + bc + ca = abc \Leftrightarrow \dfrac{ab+bc+ca}{abc} = 1$

Đó là cái đích dẫn chúng ta so sánh Q với $\dfrac{ab+bc+ca}{abc}$.

- *Do tính bình đẳng của a, b, c trong biểu thức Q cũng như trong giả thiết* $\Rightarrow$ *dự đoán min Q đạt được khi* a=b=c=3 *(điểm rơi của bất đẳng thức)*

- *Với mọi* $p, q \in R$ *ta có* $\sqrt{(p^2+q^2)\left(\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{2}{b^2}\right)} \geq \dfrac{p}{a}+\dfrac{q\sqrt{2}}{b}$.

Dấu đẳng thức có khi và chỉ khi $\dfrac{1}{pa} = \dfrac{\sqrt{2}}{qb}$ khi a=b ta có $q = p\sqrt{2}$

Chọn p = 1 có cặp. số $(1;\sqrt{2})$ *trong lời giải trên.*

Chắc bạn hài lòng với tính ưu việt của bất đẳng thức Bunhiacopski đã đưa biểu thức dạng tổng các bình phương thoát khỏi căn thức bậc hai

Cách 2: Xét các vectơ $\vec{x} = \left(\dfrac{1}{a};\dfrac{\sqrt{2}}{b}\right), \vec{y} = \left(\dfrac{1}{b};\dfrac{\sqrt{2}}{c}\right), \vec{z} = \left(\dfrac{1}{c};\dfrac{\sqrt{2}}{a}\right)$

Rõ ràng $Q = |\vec{x}| + |\vec{y}| + |\vec{z}|$ và $\vec{x}+\vec{y}+\vec{z} = \left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c};\dfrac{\sqrt{2}}{a}+\dfrac{\sqrt{2}}{b}+\dfrac{\sqrt{2}}{c}\right)$

$$\Rightarrow |\vec{x}+\vec{y}+\vec{z}| = \sqrt{\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)^2 + 2\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)^2}$$

$$= \sqrt{3}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) = \frac{\sqrt{3}(ab+bc+ca)}{abc} = \frac{\sqrt{3}abc}{abc} = \sqrt{3}$$

Với mọi $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ ta có $|\vec{x}| + |\vec{y}| + |\vec{z}| \geq |\vec{x}+\vec{y}+\vec{z}|$ hay $Q \geq \sqrt{3}$.

Dấu đẳng thức có khi và chỉ khi $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ cùng hướng $\Leftrightarrow \begin{cases} a = b = c \\ ab + bc + ca = abc \end{cases}$

$\Leftrightarrow$ a = b = c = 3. Vậy min$Q = \sqrt{3}$ (đpcm)

Nhận xét.

Trong các thí dụ đã xét ở trên, các biến đều bình đẳng với nhau dẫn tới chúng có cùng một *điểm rơi chung*. Khi tính bình đẳng bị phá vỡ, các biến không cùng chung một điểm rơi. Việc xác định ***điểm rơi riêng*** của từng biến phụ thuộc vào đặc điểm riêng của từng bài toán. Các bạn theo dõi các thí dụ sau.

Thí dụ 10

Cho các số thực $a > 0$, $b > 0$, $c \geq 2$ thoả mãn và $ab + 2(a + b) \geq 5$ (1)

Chứng minh $Q = a^4 + 4a^2 + 6b^2 + \frac{91}{32}c^2 + \frac{32}{27}c + \frac{27}{c^4} \geq \frac{11419}{432}$

Lời giải

Ta có $4a^2 + c^2 \geq 4ac$, $4b^2 + c^2 \geq 4bc$, $2(a^2 + b^2) \geq 4ab$.

Suy ra $6a^2 + 6b^2 + 2c^2 \geq 4(ab + ac + bc) = 4[ab + c(a + b)]$ (2)

Do (1) suy ra $4[ab + c(a + b)] \geq 4[ab + 2(a + b)] \geq 20$ (3)

• Từ (2), (3) suy ra $6a^2 + 6b^2 + 2c^2 \geq 20$. (4)

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} 2a = 2b = c = 2 \\ ab + 2(a + b) = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = b = 1 \\ c = 2 \end{cases}$

• Lại có $\frac{27}{32}c^2 + \frac{27}{c^4} = 27\left(\frac{c^2}{64} + \frac{c^2}{64} + \frac{1}{c^4}\right) \geq 27.3\sqrt[3]{\frac{c^2}{64}.\frac{c^2}{64}.\frac{1}{c^4}} = \frac{81}{16}$ (5)

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\frac{c^2}{64} = \frac{1}{c^4} \Leftrightarrow c = 2$

• Lại có $(a^2 - 1)^2 \geq 0 \Leftrightarrow a^4 - 2a^2 \geq -1$. Dấu đẳng thức có khi và chỉ khi $a = 1$. (6)

• Từ (1), (4), (5) và (6) suy ra $Q \geq 20 + \frac{81}{16} + \frac{2.32}{27} - 1 = \frac{11419}{432}$

Vậy $Q \geq \frac{11419}{432}$, dấu đẳng thức có khi và chỉ khi $a = b = 1$, $c = 2$.

Lời bình.

Chắc hẳn các bạn tự hỏi cơ sở nào giải thích cho lời giải trên ?

+ Trước tiên do $c \geq 2 \Rightarrow ab + c(a+b) = ab + bc + ca \geq ab + 2(a + b) \geq 5$ (7)

+ Trong (7) dấu đẳng thức có khi $a = b = 1$; $c = 2$. Dự đoán đó là các điểm rơi (riêng) của a, b, c. Cũng vì thế mà có sự xuất hiện của $(a^2-1)^2$ trong lời giải của bài toán.

+ Sự vắng mặt của $\frac{1}{c^4}$ trong (1) và cũng như trong (3) dẫn tới phải khử nó. Điều đó dẫn chúng ta đến kỹ thuật cân bằng bậc không, hoặc bậc nhất của biến c với điểm rơi 2 của nó.

Rõ ràng $mc^2 + mc^2 + \frac{1}{c^4} \geq 3\sqrt[3]{m^2}$. Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$mc^2 = \frac{1}{c^4} \Leftrightarrow m = \frac{1}{c^6}$$ *. Để đạt điểm rơi tại $c = 2$ phải có $m = \frac{1}{2^6} = \frac{1}{64}$.*

Từ đó dẫn tới tách hạng tử $\frac{91}{32}c^2 = 2c^2 + \frac{27}{32}c^2$.

Thí dụ 11

Cho các số thực dương x, y, z thoả mãn $xy + yz + zx = \frac{9}{4}$ (1)

Tìm min Q, với $Q = x^2 + 14y^2 + 10z^2 - 4\sqrt{2y}$.

Lời giải

Theo Cô si ta có $\frac{x^2}{2} + 8z^2 \ge 4xz$; $\frac{x^2}{2} + 8y^2 \ge 4yx$; $2(y^2 + z^2) \ge 4xy$

Cộng theo từng vế các bất đẳng thức trên ta có : $x^2 + 10y^2 + 10z^2 \ge 4(xy + yz + zx)$

- Kết hợp với (1) suy ra $x^2 + 10y^2 + 10z^2 \ge 9$ (2)

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} x = 4y = 4z = 2 \\ xy + yz + zx = \frac{9}{4} \end{cases} <=> \begin{cases} x = 2 \\ y = z = \frac{1}{2} \end{cases}$

- Lại có $4y^2 = \left(\sqrt{2y}\right)^4 \ge 4\sqrt{2y} - 3$ hay $4y^2 - 4\sqrt{2y} \ge -3$ (3)

Dấu đẳng thức có khi và chỉ khi $\sqrt{2y} = 1 <=> y = \frac{1}{2}$

- Cộng theo từng vế các bất đẳng thức (2) và (3) ta có

$$10x^2 + 14y^2 + z^2 - 4\sqrt{2y} \ge 9 - 3 = 6.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} x = 2 \\ y = z = \frac{1}{2} \end{cases}$

Vậy min Q = 6, đạt được khi $\begin{cases} x = 2 \\ y = z = \frac{1}{2} \end{cases}$

Thí dụ 12 . Cho $x > 0$, $y > 0$, $x^3 + y^3 \le 1$. Tìm giá trị lớn nhất của $Q = \sqrt{x} + 2\sqrt{y}$.

Lời giải

Cách 1. Với mọi $\alpha > 0$ ta có $x^3 + 5\alpha = x^3 + \alpha + \alpha + \alpha + \alpha + \alpha \ge 6\sqrt{x}\sqrt[6]{\alpha^5}$. (3)

Tương tự $\forall\beta > 0$ có $y^3 + 5\beta \ge 6\sqrt{y}\sqrt[6]{\beta^5}$. Ta chọn α, β sao cho $\sqrt[6]{\beta^5} = 2\sqrt[6]{\alpha^5}$

$<=> \beta = 2\sqrt[5]{2}\,\alpha$. Sẽ có $y^3 + 10\sqrt[6]{\alpha^5} \ge 12\sqrt[6]{\alpha^5}$ (4)

Cộng vế theo vế các kết quả (3) và (4) ta có

$$x^3 + y^3 + 5\alpha\,(1 + 2\sqrt[5]{2}) \ge 6\sqrt[6]{\alpha^5}(\sqrt{x} + 2\sqrt{y})$$

$$<=> 1 + 5\alpha(1 + 2\sqrt[5]{2}) \ge 6\sqrt[6]{\alpha^5}(\sqrt{x} + 2\sqrt{y}) \qquad (5)$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases} x^3 = \alpha \\ y^3 = 2\sqrt[5]{2}\alpha \\ x^3 + y^3 = 1 \end{cases} <=> \begin{cases} x^3 = \alpha \\ y^3 = 2\sqrt[5]{2}\alpha \\ (1 + 2\sqrt[5]{2})\alpha = 1 \end{cases} <=> \begin{cases} x^3 = \frac{1}{\sqrt[3]{1 + 2\sqrt[5]{2}}} \\ y^3 = \frac{\sqrt[5]{4}}{\sqrt[3]{1 + 2\sqrt[5]{2}}} \\ \alpha = \frac{1}{1 + 2\sqrt[5]{2}} \end{cases}$$

Thay $\alpha = \dfrac{1}{1+2\sqrt[5]{2}}$ vào (5) có $6 \ge \dfrac{6(\sqrt{x}+2\sqrt{y})}{6\sqrt[6]{(1+2\sqrt[5]{2})^5}} \Leftrightarrow \sqrt{x}+2\sqrt{y} \le \sqrt[6]{(1+2\sqrt[5]{2})^5}$.

Vậy $\max Q = \sqrt[6]{(1+2\sqrt[5]{2})^5}$

Cách 2. Áp dụng BĐT Bunhiacopski mở rộng cho 6 bộ số không âm (mỗi bộ gồm 2 số): $\{\sqrt{x};\sqrt{y}\}, \{1;\sqrt[5]{2}\}, \{1;\sqrt[5]{2}\}, \{1;\sqrt[5]{2}\}, \{1;\sqrt[5]{2}\}, \{1;\sqrt[5]{2}\}$ ta có

$$\left[1^5\sqrt{x}+\left(\sqrt[5]{2}\right)^5\sqrt{y}\right]^6 \le \left[\left(\sqrt{x}\right)^6+\left(\sqrt{y}\right)^6\right]\underbrace{\left[1^6+\left(\sqrt[5]{2}\right)^6\right]\left[1^6+\left(\sqrt[5]{2}\right)^6\right]\ldots\left[1^6+\left(\sqrt[5]{2}\right)^6\right]}_{5\text{ thừa số}}$$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{x}+2\sqrt{y}\right)^6 \le (x^3+y^3)(1+2\sqrt[5]{2})^5 \le (1+2\sqrt[5]{2})^5 \Rightarrow \sqrt{x}+2\sqrt{y} \le \sqrt[6]{(1+2\sqrt[5]{2})^5}$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} \dfrac{\sqrt{x}}{1} = \dfrac{\sqrt{y}}{\sqrt[5]{2}} \\ x^3+y^3=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{1}{\sqrt[3]{1+2\sqrt[5]{2}}} \\ y = \dfrac{\sqrt[5]{4}}{\sqrt[3]{1+2\sqrt[5]{2}}} \end{cases}$

Thí dụ 13

Cho x, y, z, m, n, p là các số thực không âm thoả mãn :

$m + n \le p$, $x + y + z = 2a$ $(a > 0)$ (1)

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $Q = mxy + nyz + pzx$ (2)

Lời giải

Viết lại (2) $\Leftrightarrow Q = m(xy+zx) + n(yz+zx) + (p-m-n)zx$

$= mx(y+z) + nz(x+y) + (p-m-n)zx$

$\Leftrightarrow Q = mx(2a-x) + nz(2a-z) + (p-m-n)zx$ (3)

Từ các giả thiết suy ra : $2a - x \ge 0$, $2a - z \ge 0$.

Áp dụng bất đẳng thức $\alpha\beta \le \dfrac{(\alpha+\beta)^2}{4}$ ta có :

$$x(2a-x) \le a^2,\ z(2a-z) \le a^2,\ xz \le \frac{(z+x)^2}{4} \le \frac{(z+x+y)^2}{4} = a^2.$$

Suy ra $Q \le ma^2 + na^2 + (p-m-n)a^2 = pa^2$

Dấu đẳng thức có khi $\begin{cases} x = 2a - x \\ z = 2a - z \\ y = 0 \\ x+y+z = 2a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = z = a \\ y = 0 \end{cases}$

Vậy $\max Q = pa^2$. Đạt được khi và chỉ khi $\begin{cases} x = z = a \\ y = 0 \end{cases}$.

Chẳng hạn với m = 2, n = 3, p = 7, a = 10 ta có

Max $Q=7.10^2=700$. Đạt được khi $\begin{cases} x = z = 10 \\ y = 0 \end{cases}$

> **Thí dụ 14** (Học sinh giỏi lớp 10 tỉnh Hà Tĩnh, 2001)
> Cho x, y, z là các số thực thoả mãn $x^2 + y^2 + z^2 \le 1$.
> Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $Q = xy + yz + 2zx$

Lời giải

Với $\forall a \neq 0$ ta có $Q=ay.\frac{x+z}{a} + 2zx \le \frac{a^2y^2 + \left(\frac{x+z}{a}\right)^2}{2} + x^2+z^2$

$$\Rightarrow Q \le \frac{a^2y^2 + \frac{2(x^2+z^2)}{a^2}}{2} + x^2 + z^2 = \frac{a^2}{2}y^2 + (1+\frac{1}{a^2})(x^2+z^2) \quad (1)$$

Ta chọn $a \neq 0$ sao cho $\frac{a^2}{2} = 1 + \frac{1}{a^2} \Leftrightarrow a^4 - 2a^2 - 2 = 0 \Leftrightarrow a^2 = 1+\sqrt{3}$

Khi đó (1) trở thành $Q \le \frac{1+\sqrt{3}}{2}(x^2+y^2+z^2) \le \frac{1+\sqrt{3}}{2} \Rightarrow Q \le \frac{1+\sqrt{3}}{2}$ (2)

Dấu đẳng thức có khi và chỉ khi

$$\begin{cases} ay = \frac{x+z}{a} \\ x = z \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = z = \frac{a^2}{2}y \\ (1 + \frac{a^4}{2})y^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = z = \frac{1+\sqrt{3}}{2}y \\ y^2 = \frac{1}{3+\sqrt{3}} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = z = \frac{\sqrt{3}(1+\sqrt{3})}{6} \\ y = \frac{1}{\sqrt{3+\sqrt{3}}} \end{cases} \text{ và } \begin{cases} x = z = -\frac{\sqrt{3}(1+\sqrt{3})}{6} \\ y = \frac{-1}{\sqrt{3+\sqrt{3}}} \end{cases} \quad (3)$$

Vậy Max $Q=\frac{\sqrt{1}+\sqrt{3}}{2}$. Chân trị của max được xác định trong (3).

§6. PHƯƠNG PHÁP TÌM GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT CỦA HÀM SỐ Y=MAX|F(X)|

• Định lý

Cho hàm số $y = f(k, x)$ xác định trên $D = [a, b] \subset R$ với k là tham số.

Ký hiệu $M = \max_D f(k, x)$, $m = \min_D f(k, x)$; U_i là tập giá trị của $y = f(i, x)$ ứng với $k = i$. Đặt $U = \cup U_i$. Ta có định lý sau :

> ĐỊNH LÝ
>
> *Nếu hàm số $y = |f(k,x)|$ liên tục trên D thoả mãn 2 điều kiện :*
>
> $\begin{cases} M - m = 2C^2 \text{ (với C là hằng số)} \\ U \supset [-C^2; C^2] \end{cases}$
>
> thì giá trị lớn nhất của $y = |f(k,x)|$ **trên D nhỏ nhất khi và chỉ khi $M + m = 0$**

Chứng minh.

Gọi $\alpha = \max_D |f(k, x)|$. **Hiển nhiên nếu tồn tại, thì** $\alpha = \max\{|M|, |m|\}$.

Do $f(k, x)$ liên tục trên D nên tồn tại $x_0 \in D$ để $f(x_0) = \frac{1}{2}(M + m)$

Rõ ràng $M = f(x_0) + C^2$, $m = f(x_0) - C^2$ nên $|M| = |f(x_0) + C^2|$, $|m| = |f(x_0) - C^2|$.

Bởi vậy :

Nếu $f(x_0) > 0$ thì $|M| > C^2 \Rightarrow \alpha > C^2$ (1)

Nếu $f(x_0) < 0$ thì $|m| > C^2 \Rightarrow \alpha > C^2$ (2)

Nếu $f(x_0) = 0$ thì $|M| = |m| = C^2 \Rightarrow \alpha = C^2$ (3)

Từ (1), (2), (3) suy ra $\min\alpha$ tồn tại khi và chỉ khi $f(x_0) = 0$ và giá trị $\min \alpha = C^2$ (4)

Theo điều kiện (2) của định lý $U \supset [-C^2; C^2]$ nên tồn tại x_0 để $f(x_0) = 0$ (5)

Từ (4), (5) $\Rightarrow$ giá trị nhỏ nhất của $\max_D |f(k, x)| = C^2$ đạt được khi và chỉ khi

$$M + m = 0 \text{ (đpcm)}.$$

> **Thí dụ 1**
>
> **Tìm a sao cho giá trị lớn nhất trên $[-1; 1]$ của hàm số $y = |f(x)| = |-2x^2 + x + a|$ là nhỏ nhất**

Lời giải

1. Hoành độ đỉnh parabol $f(x) = -2x^2 + x + a$ là $x_0 = \frac{1}{4} \in [-1; 1]$; hệ số của x^2 là $-2 < 0$. Bởi vậy :

$M = \max_{[-1;1]} f(x) = f\left(\frac{1}{4}\right) = a + \frac{1}{8}$;

$M = \min_{[-1;1]} f(x) = \min\{f(-1); f(1)\} = \min\{a - 3; a - 1\} = a - 3$

Suy ra $M - m = \frac{25}{8}$ (const)

2. Khi a thay đổi, hiển nhiên $U \supset \left[-\frac{25}{16}; \frac{25}{16}\right]$

- Theo định lý ta có $\min\left(\max_{[-1;1]} f(x)\right) = \frac{25}{16}$ **đạt được khi M + m = 0 <=> a = $\frac{23}{16}$**

> **Thí dụ 2**
>
> Chứng minh giá trị lớn nhất trên [a; b] của **hàm số** $y = \left|x^2 + px + q\right|$ đạt giá trị nhỏ nhất khi và chỉ khi $p + a + b = 0$

Lời giải

Đặt: $x = t + \frac{a+b}{2}$ Ta có $x_1 = a \Leftrightarrow t_1 = -\frac{b-a}{2}$; $x_2 = b \Leftrightarrow t_2 = \frac{b-a}{2}$

Hàm số trở thành: $f(t) = t^2 + (p+a+b)t + \frac{(a+b)^2}{4} + \frac{a+b}{2}$. **Bài toán dẫn tới chứng minh** giá trị lớn nhất trên $\left[-\frac{b-a}{2}; \frac{b-a}{2}\right]$ của **hàm số** $|f(t)|$ **đạt giá trị nhỏ nhất khi** và chỉ khi $p + a + b = 0$

Ta có $\begin{cases} f(t_1) - f(0) = \frac{(b-a)^2}{4} - (p+a+b)\frac{b-a}{2} \\ f(t_2) - f(0) = \frac{(b-a)^2}{4} + (p+a+b)\frac{b-a}{2} \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} |f(t_1)| + |f(0)| \geq \left|\frac{(b-a)^2}{4} - (p+a+b)\frac{b-a}{2}\right| \\ |f(t_2)| + |f(0)| \geq \left|\frac{(b-a)^2}{4} + (p+a+b)\frac{b-a}{2}\right| \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} |f(t_1)| + |f(0)| > \frac{(b-a)^2}{4} & \text{nếu } p + a + b > 0 \quad (1) \\ |f(t_2)| + |f(0)| > \frac{(b-a)^2}{4} & \text{nếu } p + a + b > 0 \quad (2) \\ |f(t_1)| + |f(0)| = |f(t_2)| + |f(0)| = \frac{(b-a)^2}{4} & \text{nếu } p + a + b = 0 \quad (3) \end{cases}$

Gọi α là giá trị nhỏ nhất (nếu có) của $\max_{\left[-\frac{b-a}{2}; \frac{b-a}{2}\right]} |f(t)|$.

Từ (1), (2), (3) suy ra α chỉ tồn tại khi **p + a + b = 0 (khi đó** $\alpha = \frac{(b-a)^2}{4}$